Brandeis University
Library

As for the wise, their body alone perishes in this world – Rashi

Coll JRB
32M

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

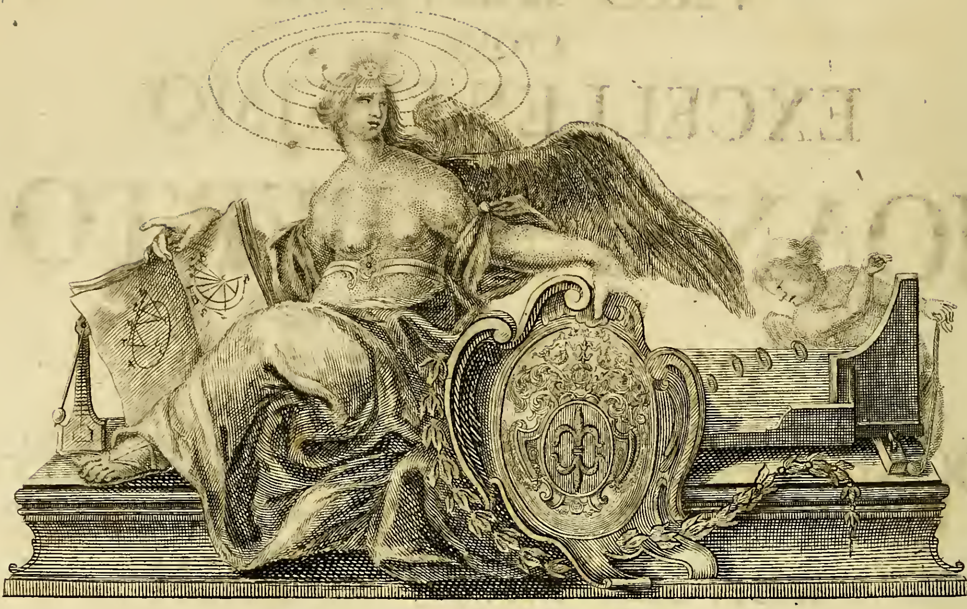
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

http://www.archive.org/details/mechanicasivemot01eule

VIRO ILLVSTRI
ATQVE
EXCELLENTISSIMO
JOANNI ALBERTO
DE KORFF
DOMINO HAEREDITARIO PRAE-
DIORVM
RENGENHOFFIENSIVM
SERENISSIMAE
ATQVE
POTENTISSIMAE RVSSORVM
IMPERATRICIS
CAMERARIO ORDINARIO
ATQVE
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPER.
PRAEFECTO.



VIR ILLVSTRIS

Cum, quae his praeteritis annis de motu corporum partim collegi et in ordinem digesſi, partim ipſe ſum meditatus, mandauisſes Vir Illustris, vt typis excuderentur, ea Tibi potisſimum offerre atque dedicare non vereor. Tanta enim ſunt Tua

Tua tam ad excolendas et augendas omnis generis ſcientias et artes, quam ad academiam ad ſummum felicitatis faſtigium euehendam, ſtudia et curae, vt Tibi omnes harum rerum cultores multum, academici autem plurimum deuincti eſſe debeant. Maximum propterea in poſterum et feliciſſimum ſucceſſum certo ſperare poſſumus, quod Auguſtae, Imperatrici noſtrae Clementiſſimae pro ſumma Eius in ſtudia propenſione placuerit Tibi potiſſimum academiae ſcientiarum curam committere, Teque laborum noſtrorum arbitrum atque iudicem conſtituere. Hoc igitur munere ita defungi decreuiſti, vt ante omnia ſtatum Academiae ad inſtitutum fundationis reformares, atque in ordinem conuenientem redigeres, tum vero vt academicorum quisque tam in docendis quam excolendis ſcientiis omne ſtudium operamque impenderet, ad quae officia exequenda non ſolum Ipſe Tuo exemplo et auctoritate quemque excitas, ſed etiam ex Auguſtae ſumma munificentia, quicquid opus eſt, largiter ſuppeditas. Equidem in hoc tractatu de motu vtrique horum

officiorum, quae requiris ſatisfeciſſe mihi videor; primo enim omnia ordine ad docendum maxime idoneo diſpoſui, atque in iis explicandis perpetuo vſus ſum methodo analytica, quae ſyntheſi in inſtruendo merito longe praeferri ſolet. Deinde *vero non pauca omnino noua paſſim adieci, quibus hanc de motu ſcientiam pro viribus adauxi atque locupletaui.* H*unc ergo laborem meum, quem tam docentibus quam diſcentibus non inutilem fore confido, vt benigne excipere digneris enixe rogo atque obſecro, meque* T*uo fauori atque beneuolentiae ſubmiſſe commendo*

VIR ILLVSTRIS

ATQVE

EXCELLENTISSIME

Dabam Petropoli die 1. Aug. A. 1736.

Tui obſeruantiſſimus

Leonhardus Euler.

PRAEFATIO.

Mechanicae vox longo ab hinc temporis interuallo duplicem obtinuit ſignificationem, et hoc quidem tempore eo nomine appellantur duae ſcientiae tam ratione principiorum, quam ratione materiae inter ſe prorſus diuerſae. Mechanicae enim nomen tum ei ſcientiae tribui ſolet, quae de aequilibrio potentiarum tractat, earumque inter ſe comparatione; tum etiam ei, in qua ipſa motus natura, generatio et alteratio explicatur. Quanquam enim in hac poſteriore disciplina potentiae quoque praecipue conſiderantur, cum iis motus et generetur et immutetur; tamen tractationis ratio multum discrepat a priore ſcientia. Ad vitandam igitur omnem ambiguitatem iuuabit illam ſcientiam, quae de potentiarum aequilibrio et comparatione agit, Staticam appellaſſe, alteri vero motus ſcientiae ſoli Mechanicae nomen re-

liquis-

302570

liquiſſe, quo quidem ſenſu hae voces iam paſſim ſunt vſurpari ſolitae. Temporis praeterea ingens intercedit diſcrimen inter has diſciplinas: Statica enim iam ante Archimedis tempora excoli coepit, Mechanicae vero prima demum iecit fundamenta Galilaeus, dum grauium deſcenſum inueſtigauit. His vero poſterioribus temporibus poſt inuentam Analyſin infinitorum tanta vtraque ſcientia cepit incrementa, vt quae ante tam longo temporis interuallo erant eruta, prae his propemodum euaneſcant. Iſta vero tam multa inuenta, quibus hae ſcientiae ad hoc vsque tempus ſunt adauctae et promotae, per tot diaria et opera ſunt ſparſa, vt harum rerum ſtudioſo ſit difficillimum ea conquirere et peruoluere. Praeterea, quod maximam parit moleſtiam, alia ſine omni analyſi et demonſtratione ſunt propoſita, alia nimis perplexis et more veterum concinnatis demonſtrationibus ſunt munita, alia vero ex alienis et minus genuinis principiis deriuata; vt niſi cum ſummo labore maximoque temporis diſpendio cognoſci et digeri nequeant. Quod quidem ad Staticam attinet, completum fere et omnibus numeris abſolutum opus prodiit Varignonii *duobus conſtans voluminibus, Gallico idiomate conſcriptum. Quod etiamſi Mechanicae titulum prae ſe ferat, tamen totum eſt occupatum in*

defi-

definiendo aequilibrio potentiarum cuiusque modi corporibus applicatarum; neque ibi vix quicquam continetur, quod ad motum, eamque ſcientiam, quam hic Mechanicae nomine indicamus, pertineat. Celeb. Wolfius *etiam in ſuis Matheſeos Elementis praeſertim nouiſſimae editionis multa praeclara cum ad Staticam tum ad Mechanicam ſpectantia in Elementis Mechanicis expoſuit, coniunctim quidem neque vllo diſcrimine inter has ſcientias facto. Praeſtituti autem limites; ipſaque operis ratio ipſi non permiſiſſe videntur tum has ſcientias a ſe inuicem diſcernere, tum vtramque ſatis ampliter explicare. Quamobrem neſcio an praeter* Hermanni *Phoronomiam vnquam aliud in publicum prodierit opus, in quo haec de motu ſcientia ſeorſim et tot tantisque eximiis inuentis locupletata eſſet pertractata. Etenim* Hermannus *cum ipſe hanc ſcientiam plurimis adauxit acceſſionibus, tum quae illo tempore aliorum induſtria erant detecta, ſimul adiecit. At cum in illo non ſatis magno opere praeter Mechanicam conſtituiſſet reliquas quoque affines ſcientias, Staticam ſcilicet, et Hydroſtaticam vna cum Hydraulica complecti, nimis exiguum ſpatium pertractandae Mechanicae reſtabat; quo factum eſt, vt omnia quae ad hanc ſcientiam pertinent, nimis breuiter et conciſe proferre co-*

 gere-

geretur. Praeterea, quod lectorem maxime diſtinet, omnia more veterum ſynthetice geometricis demonſtrationibus eſt perſecutus, atque analyſin, qua ad completam harum rerum cognitionem peruenitur, celauit. Non multum diſſimili quoque modo conſcripta ſunt Newtoni *Principia Mathematica Philoſophiae, quibus haec motus ſcientia maxima eſt adepta incrementa. Sed quod omnibus ſcriptis, quae ſine analyſi ſunt compoſita, id potiſſimum Mechanicis obtingit, vt Lector, etiamſi de veritate eorum, quae proferuntur, conuincatur, tamen non ſatis claram et diſtinctam eorum cognitionem aſſequatur, ita vt easdem quaeſtiones, ſi tantillum immutentur, proprio marte vix reſoluere valeat, niſi ipſe in analyſin inquirat, easdemque propoſitiones analytica methodo euoluat. Idem omnino mihi cum* Newtoni *Principia et* Hermanni *Phoronomiam perluſtrare coepiſſem, vſu venit, vt quamuis plurium problematum ſolutiones ſatis percepiſſe mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata reſoluere non potuerim. Illo igitur iam tempore, quantum potui, conatus ſum analyſin ex ſynthetica illa methodo elicere, easdemque propoſitiones ad meam vtilitatem analytice pertractare, quo negotio inſigne cognitionis meae augmentum percepi. Si-*

milis

mili deinde modo alia quoque paſſim diſperſa ad hanc ſcientiam ſpectantia ſcripta ſum perſecutus, quae omnia ad meum vſum methodo plana et aequabili expoſui, atque in ordinem idoneum digeſſi. Hoc *in negotio occupatus non ſolum in plurimas antea nondum tractatas incidi quaeſtiones, quas feliciter ſolutas dedi: ſed etiam complures peculiares methodos ſum adeptus, quibus tam mechanica quam ipſa analyſis non parum augmenti accepiſſe videantur.* Hinc *igitur natus eſt iſte de motu tractatus, in quo cum ea, quae in aliorum ſcriptis de motu corporum inueni, tum quae ipſe ſum meditatus, methodo analytica et commodo ordine expoſui. Operis autem partitionem tum ab ipſo corporum, quae mouentur, diſcrimine, tum ab eorum ſtatu vel libero vel non libero petii. Ipſa corporum indoles mihi hanc ſuppeditauit diuiſionem, vt primo corporum infinite paruorum et quaſi punctorum motum inueſtigarem, tum vero ad corpora finitae magnitudinis eaque vel rigida vel flexibilia vel ex partibus a ſe inuicem omnino diſſolutis progrederer. Quemadmodum enim in Geometria, in qua dimenſio corporum traditur, tractatio a punctis ordiri ſolet, ita etiam corporum finitae magnitudinis motus explicari non poteſt, niſi prius punctorum, ex quibus corpora compoſita concipienda*

ſint, motus ſit diligenter examinatus. Namque *corporis finitam habentis magnitudinem motus aliter conſiderari et determinari non poteſt, niſi vt definiatur, qualem quaeque eius particula ſeu punctum habeat motum. Quocirca haec de motu punctorum tractatio eſt fundamentum et praecipua pars totius Mechanicae, cui reliquae partes omnes innituntur.* Huic *igitur disquiſitioni de motu punctorum duos hos priores* Tomos *deſtinaui, in quorum altero puncta libera in altero vero non libera ſum contemplatus.* Latius *autem pleraque, quae in his libris tradidi, patent quam ſola puncta; ex iisque ſaepenumero corporum finitorum motus poteſt determinari, totalis ſcilicet non vero is, quo partes ſingulae inter ſe mouentur.* Ex *eo enim, quod punctum in vacuo proiectum parabolam deſcribat, quoque intelligitur quaeque corpora finita ſi proiiciantur, in parabolis moueri debere, motus vero ſingularum partium lexinde non conſtat, ſed haec inquiſitio propria eſt ſequentium* Librorum, *in quibus corporum finitorum motus definietur.* Si*mili quoque modo, quae* Newtonus *de motu corporum a viribus centripetis ſollicitatorum demonſtrauit, de punctis tantum valent, interim vero tamen ea ad motum planetarum recte transtulit.* In *hoc itaque primo* Tomo *puncta libera examini*

ſub-

ſubiicio, atque quamnam motus alterationem quaeque potentiae ſollicitantes iis inferant, inueſtigo: liberum autem mihi eſt corpus, quando nihil impedit, quo minus corpus ea celeritate et ſecundum eam directionem, quas tum ratione motus iam inſiti, tum ratione potentiarum ſollicitantium habere debet, progrediatur. Ita planetae et in terra corpora vel delabentia vel proiecta libere moueri dicuntur, quia in motu et vim inſitam et effectum potentiae ſollicitantis ſequuntur; at corpus ſuper plano inclinato deſcendens, aut pendulum oſcillationes peragens no libere mouetur, planum enim ſubiectum, vel pendulum altero termino fixum impedit, quominus corpus directe deſcendat, vto vis grauitatis poſtulat. Expono igitur Capite primo generales motus proprietates, et quae de celeritate, ſpatio et tempore tradi ſolent: atque demonſtro leges naturae vniuerſales, quas corpus liberum a nullis potentiis ſollicitatum obſeruat. Quod ſcilicet huiusmodi corpus ſi ſemel quieuerit, perpetuo in quiete perſeuerare debeat; at ſi motum habuerit, perpetuo eadem celeritate in directum progredi debeat, quarum vtraque lex ſub nomine conſeruationis ſtatus commodiſſime comprehendi poteſt. Ex quo ſequitur conſeruationem ſtatus eſſe corporum omnium proprietatem eſſentialem, atque

 omnia

omnia corpora, quatenus ſunt talia, habere vim ſeu facultatem in ſtatu ſuo perpetuo permanendi, quae nil aliud eſt niſi ipſa vis inertiae. Minus quidem apte vis nomen huius conſeruationis cauſae tribuitur, quia non eſt homogenea cum aliis viribus proprie ſic dictis, cuiusmodi eſt vis grauitatis, neque cum iis comparari poteſt; in quo errore plures, et imprimis Methaphyſici verſari ſolent, vocis ambiguitate decepti. Cum ergo omne corpus natura ſua in ſtatu eodem ſiue quietis ſiue motus perſeueret, externis viribus tribuendum eſt, ſi corpus hanc legem non ſequatur, ſed vel motu inaequabili, vel ſecundum lineam curuam progrediatur. Huiusmodi vero externae vires ſunt potentiae, de quarum aequilibrio et comparatione in Statica eſt tractandum, quae, quando in corpus agunt, eius ſtatum perturbant, id vel mouendo vel accelerando, vel retardando vel directionem mutando. In ſecundo igitur Capite perſequor, cuiusmodi effectum quaeque potentia in punctum liberum ſiue quiescens ſiue motum exercere debeat. Hinc conficiuntur vera Mechanicae principia, ex quibus, quicquid ad motus alterationem pertinet, explicari debet; quae, cum adhuc nimis leuiter eſſent confirmata, ita demonſtraui, vt non ſolum certa ſed etiam neceſſario vera eſſe intelligantur. Expoſitis principiis, ex quibus

in-

intelligi poteſt, quemadmodum motus tum conſeruetur, tum a potentiis vel generetur vel alteretur, progredior ad ipſum motum corporum a potentiis vtcunque ſollicitatorum determinandum et examinandum. Atque primo quidem motum conſidero rectilineum tanquam determinatu facillimum, qui oritur, ſi punctum liberum ab vnica potentia vel quiescens ad motum ſollicitatur, vel iam motum in ipſa potentiae directione ſiue acceleratur, ſiue retardatur, cui disquiſitioni Capita tertium et quartum dicaui, in quorum priore motum rectilineum in vacuo, in poſteriore vero motum rectilineum in medio quomodocunque reſiſtente pertracto. Quamuis enim reſiſtentia ad potentias proprie ſic dictas reduci queat, tamen in hac tractatione conſultum viſum eſt alterationem motus a reſiſtentia ſeorſim tradere; cum vt alios, qui hac de re ſcripſerunt, ſequerer, tum etiam propter eſſentialem, quae inter potentias abſolutas et reſiſtentiam intercedit differentiam. Potentia enim abſoluta ſeu proprie ſic dicta determinatam et a motu corporis non pendentem habet directionem, atque inſuper in corpus motum aeque agit, ac in quieſcens; cum contra reſiſtentiae directio ſit ſemper in ipſa corporis moti directione ſita, eiusque quantitas a celeritate corporis pendeat. Etſi vero in natura praeter reſiſtentiam, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, alia non obſeruetur, tamen alias etiam quasque reſiſtentias pertractaui, cum vt plurium circa motum in medio reſiſtente agitatorum problematum ſolutiones ſimul exponerem, tum vero imprimis vt plurima egregia

cal-

calculi ſpecimina afferendi eſſet occaſio. In duobus denique poſtremis capitibus motus corporum curuilineos ſum contemplatus, qui oriuntur, quando potentiarum ſollicitantium directio cum corporis proiecti directione non congruit. Hoc enim caſu corpus perpetuo a recto tramite retrahitur et in linea curua moueri cogitur. In quinto quidem capite motum huiusmodi curuilineum in vacuo expoſui, in ſexto vero capite medii reſiſtentiam ſimul conſideraui. Primaria ergo problemata, quae in his capitibus continentur, in hoc verſantur, vt corporis vtcunque proiecti et a quibuscunque potentiis ſollicitati curua, in qua moueatur, determinetur, atque ſimul corporis celeritas in ſingulis curuae punctis indicetur, hocque tam in vacuo, quam in medio reſiſtente. Ex his vero primariis propoſitionibus tunc aliae ſunt natae, in quibus vel ex data curua a corpore deſcripta, vel ex data motus quadam indole tum potentiae ſollicitantes tum reſiſtentia quaeruntur. In quo negotio in id imprimis incubui, vt omnia tam a Newtono *quam ab aliis tractata hucque ſpectantia problemata complecterer, atque ſolutiones genuinas methodo analytica traderem. His igitur Tomus iſte primus abſoluitur, quem pariter ac ſequentem ita conſcripſi, vt qui in analyſi tam finitorum quam infinitorum ſatis fuerit exercitatus, is mira facilitate omnia intelligere, atque ſine vlla manuductione integrum hoc opus perlegere queat.*

) o (

CAPUT

CAPUT PRMUM
DE MOTU IN GENERE.

DEFINITIO 1.

1.

Motus eſt translatio corporis ex loco, quem occupabat, in alium. Quies vero eſt permanſio corporis in eodem loco.

Corollarium 1.

2. Motus igitur et quietis ideae in alias res cadere non poſſunt, niſi quae locum occupant. Quare cum hoc ſit corporum proprium, locum occupare, de ſolo corpore dici poteſt, quod moueatur vel quieſcat.

Corollarium 2.

3. Atque haec motus quietisque idea ita eſt propria corpori, vt ad omnia prorſus corpora pertineat. Nullum enim exiſtere poteſt corpus, quod non vel moueatur vel quieſcat.

DEFINITIO 2.

4. Locus eſt pars ſpatii immenſi ſeu infiniti, in quo vniuerſus mundus conſiſtit. Vocari hoc ſen-

ſu acceptus locus ſolet abſolutus, vt diſtinguatur a loco relatiuo, cuius mox fiet mentio.

Corollarium I.

5. Quando igitur corpus ſucceſſiue aliam atque aliam huius immenſi ſpatii partem occupat, mouetur: at ſi perpetuo in eadem ſede perſeuerat, tum quieſcit.

Corollarium 2.

6. Concipi autem animo ſolent huius ſpatii termini fixi ad quos corpora referuntur. Atque iſta relatio eſt id, quod ſitus appellatur. Quae igitur corpora eundem ſeruant ſitum reſpectu horum terminorum ea quieſcere dicuntur. Contra vero, quae ſitum ſuum mutant, moueri dicuntur.

Scholion I.

7. Si hac ſignificatione expoſitae voces accipiantur, vocari ſolent motus abſolutus, quiesque abſoluta. Atque hae ſunt verae et genuinae iſtarum vocum definitiones, ſunt enim accommodatae ad leges motus, quae in ſequentibus explicabuntur. Quoniam autem immenſi illius ſpatii eiusque terminorum, quorum in datis definitionibus mentio eſt facta, nullam nobis certam formare poſſumus ideam; loco huius immenſi ſpatii eiusque terminorum conſiderare ſolemus ſpatium finitum, limitesque corporeos, ex quibus de corporum motu et quiete iudicamus. Sic dicere ſolemus, corpus, quod re-

ſpe-

ſpectu horum limitum ſitum eundem conſeruat, quiescere, id vero, quod ſitum eodem reſpectu mutat, moueri.

Scholion 2.

8. Quae hic de immenſo et infinito ſpatio eiusque terminis dicta ſunt, conſiderari debent vt conceptus pure mathematici. Qui, quanquam metaphyſicis ſpeculationibus videntur contrarii, nihilo tamen minus ad inſtitutum noſtrum recte adhibentur. Namque non aſſerimus, dare huiusmodi ſpatium infinitum, quod habeat limites fixos et immobiles; ſed ſiue ſit, ſiue non ſit, non curantes, poſtulamus tantum, vt motum abſolutum et abſolutam quietem contemplaturus ſibi tale ſpatium repraeſentet, ex eoque de corporum ſtatu vel quietis vel motus iudicet. Ratiocinium enim commodiſſime hoc modo inſtituetur, vt animum a mundo abſtrahentes imaginemur nobis ſpatium infinitum atque vacuum, et in eo corpora collocata eſſe concipiamus, quae ſi in hoc ſpatio ſitum ſuum retinent, abſolute quieſcere, ſin autem ex alia huius ſpatii parte in aliam tranſeunt, abſolute moueri iudicanda ſunt.

DEFINITIO 3.

9. Motus relatiuus eſt ſitus mutatio reſpectu cuiusdam ſpatii pro lubitu aſſumti. Atque quies relatiua eſt permanſio in eodem ſitu reſpectu eiusdem ſpatii. *Ita terram pro hoc ſpatio accipientes, ea quiescere dicimus, quae in terra ſitum ſuum immutatum tenent; ea vero moueri, quae ex alio ſitu reſpectu ter-*

rae in alium progrediuntur, hocque ſenſu ſolem moueri dicimus. Simili modo in naui propulſa relatiue quieſcunt, quae eundem in naui tenent locum, et relatiue mouentur, quae in naui locum ſuum mutant.

Corollarium 1.

10. Conueniunt motus relatiuus et quies relatiua cum abſolutis, quando ſpatium corpusue, cuius reſpectu motus et quies iudicantur, reuera quieſcit reſpectu ſpatii illius immenſi et infiniti. Si enim terra reuera quieſcit, quae huius reſpectu mouentur et quieſcunt, etiam abſolute mouentur et quieſcunt.

Corollarium 2.

11. Diſcrepant autem relatiuus motus et quies ab abſolutis, ſi ſpatium illud mouetur. Nam ſi terra reſpectu ſpatii infiniti non quieſcit, neque quae eius reſpectu quieſcunt, abſolute quieſcunt; atque etiam motus abſolutus differet a relatiuo. Quin imo fieri poteſt, vt corpus, quod relatiue mouetur, idem abſolute quieſcat.

Scholion.

12. Perſpicuum eſt ſtatum hunc corporum relatiuum vel motus vel quietis innumerabilibus modis poſſe eſſe diuerſum: prout enim aliud atque aliud aſſumitur ſpatium, cuius reſpectu motus et quies diiudicantur, alii prodibunt motus relatiui aliaque quies. Sic ſtellae fixae reſpectu telluris mouentur, quaelibet vero reſpectu reliquarum quieſcit. Atque pla-

planetae tam reſpectu terrae, quam ſtellarum fixarum mouentur. In ſequentibus autem ſemper et motum et quietem abſolutam intelligi volo, niſi expreſſe monuero etiam ad relatiua pertinere, quae afferentur.

PROPOSITIO I.
Theorema.

13. *Omne corpus, quod ſiue motu abſoluto ſiue relatiuo in alium locum transfertur, per omnia loca media tranſit, neque ſubito ex primo in vltimum poteſt peruenire.*

Demonſtratio.

Pro motu abſoluto ſi corpus ſubito ex loco primo in extremum perueniret, neceſſe eſſet, vt in primo fuiſſet annihilatum, ſtatimque in vltimo de nouo productum, id quod per leges naturae, niſi accedat miraculum, fieri non poteſt. Procedet igitur ex primo in proximum quendam, ex hocque in ſequentem, donec tandem in extremum perueniat. *Pro motu relatiuo* ſi corpus, quod in locum ſpatii infiniti ſubſtituitur, re vera quieſcit, ſuperius valet ratiocinium (10). At ſi moueatur, ipſum quoque per ſingula loca media tranſire debet, et propterea etiam motus relatiuus erit ſucceſſiuus, fietque per ſingula media loca. Q. E. D.

Corollarium I.

14. Sequitur ex his etiam motum non poſſe fieri in inſtanti, ſed tempore opus eſſe, quo ex

 alio

alio loco in alium perueniat corpus. Quia enim per ſingula loca media debet tranſire, hoc cum motu inſtantaneo conſiſtere non poteſt.

Corollarium 2.

15. Poterit igitur etiam via aſſignari, per quam corpus tranſiit, atque ea cognita, nullum in ea erit punctum, quod corpus ex primo loco in vltimum progreſſum non attigerit. Vocari autem ſolet haec via ſpatium percurſum.

Scholion.

16. Facile quoque eſt haec ad corpora circa axem rotata accommodare. Quoniam enim ipſum corpus ſitum ſuum non mutat: tamen motus ineſt in eius partibus, qui cognoſcetur, ſi ſingulae partes, vt totidem diuerſa corpora ſeorſim conſiderantur. Singulae enim reſpectu ſpatii infiniti ſitum ſuum mutare deprehendentur, neque vllae quieſcent niſi quae in ipſo axe ſunt poſitae. Atque ſimili modo omnia corpora contemplari oportet, vt non ſolum ipſius totius, ſed ſingularum etiam partium ſitus eiusque mutatio inſpiciatur.

DEFINITIO 4.

17. Corpus aequabiliter vel vniformiter moueri dicitur, quod aequalibus temporibus per aequalia ſpatia currit. Motus vero inaequabilis eſt, qui aequalibus temporibus fit per ſpatia inaequalia, ſeu qui aequalia ſpatia inaequalibus temporis interuallis abſoluit.

Corol-

Corollarium 1.

18. Corpus igitur motu aequabili latum duplo tempore abſoluit ſpatium duplum, triplo triplum, atque in genere ſpatia percurſa ſunt temporibus proportionalia, temporaque ſpatiis viciſſim. Vt nauis ſuper mari aequabili motu incedens, ſi vna hora duo percurrit milliaria, eadem duabus horis quatuor abſoluet milliaria, tribus ſex, et n horis $2n$ milliaria.

Corollarium 2.

19. Quamobrem ſi datur motus aequabilis, habebitur ex eo accurata temporis menſura, quae niſi e xmotu cognoſci non poteſt. Metiendis enim ſpatiis, quae corpus aequabiliter motum percurrit, innoteſcet ſimul temporum, quibus ea erant percurſa, ratio.

Scholion.

20. Neque vero aliunde habemus temporis in annos, dies, et horas diuiſionem, niſi ex motu, quem tanquam aequabilem ſpectamus. Poſita enim terra quieſcente crediderunt veteres ſolem motu aequabili ferri, tempusque, quo circa terram reuoluitur, diem appellauerunt. Porro ſumſerunt ſtellarum fixarum circa terram motum quoque eſſe aequabilem, atque tempus, quo ſol in eundem reſpectu ſtellarum fixarum locum, reuertitur, annum poſuerunt. Denique haec tempora in partes aequales diuiſerunt, hocque modo horas, et minuta ſunt ade-

adepti. Facile autem patet, ſi motus iſti non ſint, vt creduntur, aequabiles, hanc quoque temporum menſuram eſſe erroneam. Atque re ipſa recentiores aſtronomi in his motibus inaequalitatem detexerunt, et inuenerunt dies omnes non eſſe aequales inter ſe, quamobrem correctionem etiam adhibere ſolent ex aliis magis aequabilibus motibus; quam temporis aequationem vocant, ex qua inaequalitas dierum cognoſcitur.

DEFINITIO 5.

21. Omne corpus, quod mouetur, celeritatem ſeu velocitatem habere dicitur, eaque menſuratur ſpatio, quod id corpus aequabiliter motum dato tempore percurrit. *Scilicet quando corpus* B *eodem tempore duplum ſpatium motu aequabili abſoluit, quo corpus* A *etiam aequabiliter motum ſimplum percurrit, corpus* B *duplo maiorem habere dicitur celeritatem, quam corpus* A.

Corollarium 1.

22. Quia igitur in motu aequabili corpus aequabilibus temporibus aequalia percurrit ſpatia (17.), habebit corpus aequabiliter motum perpetuo eandem celeritatem, ſeu velocitatem. In motu vero inaequabili corpus ſucceſſiue aliam atque aliam induit celeritatem.

Corollarium 2.

23. Celeritas autem, quam corpus inaequabiliter motum in quouis ſpatii percurſi puncto habet,

bet, menſuranda eſt ex ſpatio, quod ea celeritate aequabiliter motum dato tempore percurrere poſſet.

Corollarium 3.

23. Celeritas porro corporis aequabiliter moti abſolute menſurari poteſt ſpatio, quod dato tempore verbi gratia vno minuto ſecundo percurritur. Atque is celeritatem corporis cuiuspiam perfecte cognoſcere cenſendus eſt, qui ſpatium definire valet, quod corpus ea celeritate motum tempore minuti ſecundi percurrit.

Scholion.

24. Maxime etiam eſt in vſu haec celeritatis metiendae ratio. Nautas enim nauis celeritatem exploraturos videmus ſpatium menſurare, quod nauis dato tempore percurrit. Vulgo autem accipiunt interuallum quatuor horarum, et inueſtigant, quot milliaria nauis hoc tempore abſoluat. Ex quo ſimul intelligitur, quot pedes nauis tempore minuti ſecundi percurrat, ſiquidem motu aequabili progrediatur.

PROPOSITIO 2.

Theorema.

25. *Duorum corporum aequabili motu progredientium celeritates ſunt directe vt ſpatia quaecunque percurſa et inuerſe vt tempora, quibus ea ſpatia erant percurſa.*

Demonſtratio.

Sint duo corpora A et a, eorumque celeritates C et c; percurrat illud A ſpatium S tempore T, hoc vero a ſpatium s tempore t. Iam quia in motu aequabili ſpatia ſunt temporibus proportionalia (18.), determinabitur ſpatium, quod corpus a tempore T abſoluit, ex hac proportione $t:T=s:\frac{sT}{t}$: mouebitur ergo corpus a tempore T per ſpatium $\frac{sT}{t}$. At corpus A mouetur eodem tempore T per ſpatium S. Celeritates vero corporum menſurari debent ſpatiis eodem tempore percurſis (18). Quocirca erit $C:c=S:\frac{sT}{t}$ ſeu $C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$. Ex quo ſequitur celeritates eſſe directe vt ſpatia et inuerſe vt tempora, quibus ea ſunt percurſa. Q. E. D.

Corollarium I.

26. Ex vltima analogia prodit haec aequatio $\frac{CT}{S}=\frac{ct}{s}$. In quouis igitur motu aequabili factum ex celeritate in tempus, ſi diuidatur per ſpatium eo tempore percurſum, dabit ſemper eundem quotum.

Corollarium 2.

27. Erit etiam $T:t=\frac{S}{C}:\frac{s}{c}$. Ex quo ſequitur tempora eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum et inuerſa celeritatum, ſeu eſſe vt ſpatia per celeritates diuiſa.

Corollarium 3.

28. Deinde inuenta proportio transmutatur etiam in hanc $S:s=CT:ct$. Ex qua colligitur ſpatia motu aequabili percurſa eſſe in ratione compoſita ex ratione celeritatum et ratione temporum.

Co-

Corollarium 4.

29. Data igitur celeritate corporis aequabiliter moti vna cum ſpatio quouis deſcripto, innoteſcet tempus, quo hoc ſpatium eſt percurſum; diuidendo ſcilicet ſpatium per celeritatem. Cum enim hunc quotum tempori ſemper proportionalem eſſe oſtenderimus, poterimus eundem pro temporis menſura vſurpare.

Corollarium 5.

30. Similiter celeritas poterit exprimi per ſpatium percurſum diuiſum per tempus, atque ſpatium etiam ipſum per factum ex tempore in celeritatem.

Scholion 1.

31. Si enim celeritas tanta ſit, vt corpus ea motum tempore minuti ſecundi abſoluat ſpatium trium pedum, et propterea celeritatem exponamus numero 3; poterimus inuenire tempus, quo 60 pedes v. gr. eodem motu abſoluuntur. Diuidatur enim 60 per 3 quotus 20 indicabit hos 60 pedes 20 minutis ſecundis percurri. Et ſi quaeratur ſpatium tempore 12 minutis ſecundis percurſum, prodibit id 36 pedum. Atque etiam corporis 6 minutis ſecundis 48 ped. percurrentis proueniet celeritas 8, quae indicat hoc corpus minuto ſecundo 8 ped. percurrere.

Scholion 2.

32. Atque hanc tempora, ſpatia et celeritates menſurandi rationem in ſequentibus ſemper adhibe-

bimus. Tempora nempe in minutis ſecundis perpetuo exprimemus, et ſpatia pedibus, iisque Rhenanis. Celeritates vero, vt iam eſt factum, denotabimus numero pedum, qui minuto ſecundo percurrunt. Infra quidem commodior celeritates determinandi ratio occurret, qua deinceps ſumus vſuri, ſed ea tamen ex hac naſcitur, ad eamque facile reuocatur.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

33. *In motu quantumvis inaequabili, minima ſpatii elementa motu aequabili percurri concipi poſſunt.*

Demonſtratio.

Quemadmodum enim in geometria curuarum linearum elementa vt lineolae rectae conſiderantur, ita etiam ſimili modo in mechanica motus inaequabilis in infinitos aequabiles reſoluitur. Vel enim reuera elementa aequabili motu percurruntur, vel mutatio celeritatis per huiusmodi elementa eſt tantilla, vt incrementum aut decrementum ſine errore negligi poſſit. In vtroque caſu ergo apparet propoſitionis veritas. Q. E. D.

Corollarium 1.

34. Omnis ergo celeritatis mutatio in motu inaequabili in ſingulorum elementorum initiis fieri concipienda eſt, quia integra elementa aequabili motu percurri ponuntur.

Co-

Corollarium 2.

35. Quare ſecundum notandi modum analyſeos infinite paruorum, ſi celeritas in primo elemento fuerit c, erit celeritas in ſecundo $c+dc$, in tertio $c+2dc+ddc$, et ita porro.

Scholion.

36. Demonſtrationis datae vis hoc nititur fundamento, quod celeritatis mutatio, quae fieri poteſt, dum elementum infinite paruum percurritur, debeat eſſe infinite exigua et euaneſcere prae celeritate, quam corpus iam habet, hoc enim niſi eſſet, generaretur motus finitus in inſtanti, quod eſſet abſurdum. Interim tamen videtur haec propoſitio admitti non poſſe, ſi ipſe motus et celeritas eſt infinite parua, quo caſu incrementum vel decrementum momentaneum habere poteſt rationem finitam ad illam. Sed de hoc infra videbimus, vbi motus generatio conſiderabitur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

37. *Moueatur corpus motu vtcunque inaequabili per lineam* AM, *data vero ſit celeritas corporis in quouis loco: oportet determinare tempus, quo arcus* AM *abſoluitur.* Tab. I. Fig. I.

Solutio.

Sit ſpatium AM, ſiue ſit linea recta ſiue curua, $=s$, et celeritas, quam corpus habet in M ſit c, quae erit functio quaedam ipſius s. Ab M accipiatur elementum Mm, quod igitur motu aequabili idque ce-

leritate c percurri concipiendum eſt. Vocato elemento Mm, ds; erit tempus, quo hoc elementum pecurritur $=\frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM abſoluitur $=\int\frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debebit conſtans, quae reddat hoc tempus $=0$, ſi ponitur $s=0$, ſecundum notas integrationis regulas. Q. E. J.

Exemplum I.

38. Sit celeritas in M vt poteſtas quaecunque ſpatii iam deſcripti AM, ſcilicet $c=s^n$; erit $\int\frac{ds}{c}=\frac{s^{1-n}}{1-n}$. Ad quod conſtantem non opus eſt adiicere ſi $n<1$, vel negatiuum habeat valorem: dabit enim ipſum $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ tempus, quo arcus AM percurritur. At ſi fuerit $1-n$ numerus negatiuus habebitur $\int\frac{ds}{c}=\frac{-1}{(n-1)s^{n-1}}$. Ad quod conſtans $\frac{1}{(n-1)0^{n-1}}$ i. e. infinita quantitas debet addi, quo totum habeatur tempus per AM. Tempore ergo in his caſibus opus eſt infinito, quo corpus ex A in alium quemuis locum M perueniat. Quamobrem perpetuo in A perſiſtet, neque vnquam inde egredietur. Fit hoc vero, quoties eſt n numerus poſitiuus vnitate maior. Si vero eſt $n=1$, tempus nequidem algebraice poteſt exhiberi, prouenit enim $\int\frac{ds}{s}=ls$, ad quod etiam quantitatem infinitam addi oporteret, quo tempus per AM haberetur.

Co-

Corollarium 1.

39. In mundo ergo alii caſus ſubſiſtere nequeunt, niſi in quibus celeritates motus ſaltem principio ſint vt ſpatiorum percurſorum poteſtates exponentis minoris, quam eſt vnitas.

Corollarium 2.

40. Progrediatur corpus in recta AM, ſitque in quouis loco celeritas eius vt applicata MN curuae AN, quae cum recta AM in A concurrat, ita vt celeritas corporis in principio A ſit nulla. Perſpicuum eſt ex praecedentibus, quo tempus per AM fiat finitum, oportere tangentem AB in A eſſe ad AM perpendicularem. Coincidente enim M in A debet MN fieri $=AM^n$, et n numerus vnitate minor ſcilicet fractio ex quo normalitas tangentis ſequitur. Sin vero tangens AB angulum conſtituat acutum vel infinite paruum cum AM, tempus per AM fiet infinitum. Tab. I. Fig. 2.

Exemplum 2.

41. Moueatur corpus per rectam AB ita, vt deſcripto ſuper ea ſemicirculo ANB celeritas in quouis puncto M ſit vt applicata circuli in eo loco MN. Id quod ita poteſt intelligi, celeritatem in M tantam eſſe, qua corpus minuto ſecundo poſſit percurrere ſpatium $=m.$ MN. Ponatur huius ſemicirculi radius $AC=a$, ſpatium iam percurſum $AM=s$; erit $MN=\surd(2as-ss)$. Celeritas ergo in M, quam poſuimus c, erit hoc caſu $=m\sqrt{2as-ss}$. Tab. I. Fig. 3.

Id

Idcirco tempus, quo ſpatium AM percurritur, erit $=\int\frac{ds}{m\sqrt{(2as-ss)}}=\frac{1}{ma}\int\frac{ads}{\sqrt{(2as-ss)}}$. At $\int\frac{ads}{\sqrt{2as-ss)}}$ denotat ipſum circuli arcum AN. Quamobrem tempus, quo ſpatium AM percurritur erit $=\frac{AN}{m.AC}$ minut. ſecundis. Atque tempus, quo corpus ab A ad B mouetur erit $=\frac{ANB}{m.AC}$ min. ſec. Eſt vero quam proxime $\frac{ANB}{AC}=\frac{22}{7}$. Ergo tempus hoc erit $=\frac{22}{7.m}$ minutis ſecundis. Ex quo intelligitur quantacunque ſit linea AB, eam perpetuo eodem tempore percurri.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 1. 42. Ex ſolutione problematis apparet etiam eodem tempore, quo corpus ex A in M peruenit, idem motu retrogrado ex M in A peruenturum, ſi modo in vtroque motu in iisdem locis aequales habeat celeritates.

Corollarium 4.

Tab. I. Fig. 4. 43. Repraeſentent curuae AN applicatae MN celeritates, quas corpus in recta AN motum habet in ſingulis punctis M, conſtituat autem curua in A cum recta AM angulum recto minorem. His poſitis iam eſt oſtenſum, tempus, quo corpus ex A in M perueniet, fore infinite magnum. Quare etiam motu retrogrado corpus ex M verſus A latum poſt tempus demum infinitum i. e. nunquam in A pertingit, quamuis vbique, niſi in A habeat celeritatem finitam.

PRO-

PROPOSITIO 5.
Theorema.

44. *Moueantur duo corpora in rectis* AM *et* am *exprimanturque eorum celeritates applicatis curuarum* AN *et* an *ſimilium. Dico haec corpora percurſura ſpatia homologa* AM *et* am *eodem tempore.* Tab. I. Fig. 5.

Demonſtratio.

Sint igitur AM et *am* ſpatia homologa, habebunt ea eandem rationem, quam applicatae MN et *mn*, ſit iſta ratio $m:n$; erit, poſitis $AM = s$, et $MN = c$, $am = \frac{ns}{m}$ et $mn = \frac{nc}{m}$. Eſt vero tempus per AM $= \int \frac{ds}{c}$ (37.), tempus autem per *am* habebitur ponendo $\frac{nds}{m}$ loco ds, et $\frac{nc}{m}$ loco c, in $\int \frac{ds}{c}$. Hoc vero facto iterum prodit $\int \frac{ds}{c}$: quare vtrumque tempus per AM et *am* erit $\int \frac{ds}{c}$, ſunt igitur ea aequalia. Q. E. D.

Corollarium 1.

45. Intelligitur hinc quoque ratio eius, quod §. 41. eſt dictum, ſunt enim circuli omnes curuae ſimiles et diametri ſpatia homologa.

Corollarium 2.

46. Sit curuae AN parameter a, quae ſiue maior ſiue minor accipiatur, curua AN mutetur in aliam ſui ſimilem. Hoc vero vt eueniat, huiusmodi debet eſſe aequatio pro curua AN, vt applicata c aequetur functioni ipſarum a et s vnius tantum dimenſionis. Pro variis autem valoribus ipſius a, s exprimet ſpatia homologa, ſi accipiatur $= a$ vel

na. Quoties igitur *c* huiuſmodi definitur aequatione, ſpatia *na*, ſiue magnum ſiue paruum ponatur *a*, aequalibus percurruntur temporibus.

Scholion.

47. Quemadmodum, ſi *c* aequatur functioni ipſarum *a* et *s* vnius dimenſionis, tempora per *a* vel *na* ſunt omnia aequalia, quicquid ſit *a*: Ita etiam ſi fuerit *c* aequale functioni ipſarum *a* et *s*, quae habeat *m* dimenſiones, tempora per *a* vel *na*, quicquid ſit *a*, tenebunt rationem a^{1-m}. Nam $\frac{c}{a^{m-1}}$, erit functio vnius dimenſionis ipſarum *a* et *s*, quae ponatur *k*. Erit ergo $c = a^{m-1}k$, et $\int\frac{ds}{c} = a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$. At $\int\frac{ds}{k}$ dabit, poſito $s = a$ vel *na*, quantitatem conſtantem, vtcunque varietur *a* (46.). Quamobrem $a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$, dabit multiplum quoddam poteſtatis a^{1-m}. Erit conſequenter tempus per *na* vt a^{1-m}.

DEFINITIO 6.

48. Scala celeritatum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant celeritates, quas corpus motum habet in locis reſpondentibus ſpatii, quod percurrit.
Tab. I. *Ita corporis in recta* AM *moti ſcala celeritatum eſt cur-*
Fig. 6. *ua* AN, *cuius applicatae* MN *exponunt celeritatem corporis in ſingulis punctis* M.

DEFINITIO 7.

49. Scala temporum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant tempora, quibus partes ſpatii percurſi reſpondentes abſoluuntur. *Ita ſi curua* AT *ſue-*

ſuerit eiusmodi, vt eius applicata quaeuis MT *exhibeat tempus, quo ſpatium* AM *percurritur, curua* AT *erit ſcala temporum.*

Corollarium.

50. Quemadmodum ex data ſcala celeritatum AN inueniri debeat ſcala temporum, iam ex praecedente problemate (37.) apparet. Scilicet ſi dicatur ſpatium $AM = s$, celeritas in M i. e. $MN = c$, et tempus, quo AM percurritur i. e. $MT = t$, erit $t = \int \frac{ds}{c}$. Ex data igitur curua AN conceſſis quadraturis conſtrui poteſt curua AT.

PROPOSITIO 6.

Problema.

51. *Data ſcala temporum* AT *inuenire et conſtruere ſcalam celeritatum* AN.

Solutio.

Ponantur vt ante $AM = s$, $MN = c$, et $MT = t$ oportebit ex data aequatione inter s et t inueniri aequationem inter s et c. Facile vero hoc efficietur ex ſupra inuento canone $t = \int \frac{ds}{c}$. Fit enim differentiando $dt = \frac{ds}{c}$, atque $c = \frac{ds}{dt}$. Ducatur ergo ad curuam AT in T normalis TO erit $\frac{ds}{dt} = \frac{MT}{MO}$. Fiat ergo vt MO ad MT, ita linea quaedam vnitate expreſſa, qua minutum ſecundum indicatur, ad quartam proportionalem, quae erit $= MN$. Sumatur igitur ab M interuallum $MQ = 1$, et ducatur QN parallela normali TO, erit punctum N in ſcala celeritatum quaeſita. Q. E. I.

Exemplum 1.

52. Sit ſcala temporum linea recta ad AM vtcunque inclinata; erit $t = ms$, et $dt = mds$. Prodibit igitur $c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}$. Scala celeritatum ergo erit linea recta ipſi AN parallela, atque corpus motu feretur aequabili.

Exemplum 2.

53. Sint tempora vt poteſtates quaecunque ſpatiorum deſcriptorum, ſeu $t = s^m$, ideoque $dt = ms^{m-1}ds$. Ex quo erit $c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m}s^{1-m}$. Quare ſi curua AT fuerit parabola Appolloniana i. e. $t = s^{\frac{1}{2}}$; erit $m = \frac{1}{2}$, atque $c = 2s^{\frac{1}{2}}$. Ex quo apparet hoc caſu ſcalam celeritatum quoque eſſe huiusmodi parabolam.

Corollarium.

54. Intelligitur etiam, ſi detur aequatio inter c et t, quomodo inueniendum ſit ſpatium percurſum s, atque vtraque ſcala celeritatum et temporum. Quia enim eſt $c = \frac{ds}{dt}$; erit $ds = cdt$, et $s = \int cdt$.

Scholion.

55. Monendum hic eſt, iſta, quae hactenus de ſcalis celeritatum et temporum ſunt tradita, non ſolum ad motum abſolutum ſpectare, ſed etiam ad relatiuum pertinere. Nondum enim ipſa motus natura eſt conſiderata, neque quicquam eſt aſſumtum, quod motui abſoluto eſſet proprium. Nunc vero afferemus quasdam propoſitiones, quae motui ab-

abſoluto ſunt peculiares, ex quibusque quodammodo interna inter motus abſolutos et relatiuos differentia poterit perſpici.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

56. *Corpus abſolute quieſcens perpetuo in quiete perſeuerare debet, niſi a cauſa externa ad motum ſollicitetur.*

Demonſtratio.

Concipiamus corpus hoc exiſtere in ſpatio infinito atque vacuo, perſpicuum eſt nullam eſſe rationem, quare potius in hanc vel illam plagam moueatur. Conſequenter ob defectum ſufficientis rationis, cur moueatur, perpetuo quieſcere debebit. Neque vero haec ratio in mundo ceſſat; quamuis obiici poſſet eſſe in mundo ſufficientem rationem, quare in hanc potius, quam illam plagam, cedat. Etenim non eſt credendum in ſpatio infinito illo et vacuo defectum ſufficientis rationis ad motum vnicam eſſe cauſam permanſionis in quiete; ſed nullum eſt dubium, quin in ipſa corporis natura ſita ſit cauſa huius phaenomeni. Defectus ſcilicet ſufficientis rationis non poteſt pro vera et eſſentiali cuiusquam euentus cauſa haberi, ſed tantum veritatem idque rigide demonſtrat. Quin et ſimul indicat in ipſa rei natura occultam eſſe cauſam veram eſſentialem, quae non ceſſat, ceſſante illo ſufficientis rationis defectu. Ita Archimedis demonſtratio de aequilibrio bilancis vtrinque ſibi ſimilis, non ſolum in vacuo, ſed etiam in mundo rei veritatem euincit. Alia autem eaque

genuina datur huius aequilibrii ratio, quae etiam in mundo locum habet. Cum igitur in vacuo ſpatio verum ſit corpus quieſcens in quiete permanere debere; erit in ipſa corporis natura etiam huius rei ratio poſita, propter quam in mundo quoque corpus, quod ſemel quieſcit, niſi ab alia cauſa vrgeatur, in quiete perſiſtere cogatur. Q. E. D.

Corollarium 1.

57. Eſt igitur lex in ipſa rerum natura fundata, quod omne corpus quieſcens, niſi ab alia cauſa externa ad motum ſollicitetur, in quiete debeat perſeuerare.

Corollarium 2.

58. Quemadmodum fundamentum huius demonſtrationis ex ipſa quietis abſolutae natura eſt petitum, perperam iſta lex ad quietem relatiuam extenditur.

Scholion.

59. Experientia autem ipſa edocemur hanc legem in quiete relatiua non valere. Videmus enim corpora in naui relatiue quiescentia, ſi nauis ſubito concutiatur, in quiete non permanere, ſed ſimul concuti et de loco ſuo moueri; etiamſi ante quieuiſſent, nullaque acceſſiſſet cauſa ea commoueus.

Corollarium 3.

60. Simili modo, quo euicimus corpus ſemel quiescens perpetuo quiescere debere, niſi a cauſa externa afficiatur, poteſt oſtendi, corpus, quod nunc

nunc quiescit abſolute, ante hac ſemper quoque quieuiſſe, ſiquidem ſibi ipſi fuerit relictum. Vti enim nulla eſt ratio, quare potius ex hac, quam illa plaga, in eum, quo nunc ſtat, locum peruenerit, ita concludendum eſt etiam in eo loco antea ſemper conſtitiſſe.

Corollarium 4.

61. Corpus igitur, quod ſemel quieſcit, ſi vlla cauſa externa in id neque agat, neque egerit, id non ſolum in poſterum quiescet ſemper, ſed etiam ante perpetuo quieuiſſe ſtatuendum eſt.

Corollarium 5.

62. Sequitur ex hoc corpus ſemel abſolute motum in quietem peruenire nunquam poſſe ſibi relictum. Nam ſi tandem quieſceret, idem oporteret antea quoque ſemper quieuiſſe, quod eſt contra hypotheſin.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

63. *Corpus abſolutum habens motum, aequabiliter perpetuo mouebitur, et eadem celeritate iam antea quouis tempore fuit motum; niſi cauſa externa in id agat aut egerit.*

Demonſtratio.

Si enim corpus motum celeritatem non conſeruaret ſemper eandem, tum vel augeri deberet vel diminui eius celeritas. Hoc autem caſu ad quietem inclinaret quod, quia nunquam quietem conſe-

ſequi poteſt (62.) accidere nequit. Illo caſu vero ex quiete proueniſſe cenſendum eſſet, quod aeque foret abſurdum. Praeterea ſi hoc corpus in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, eiusque via, qua eſt ingreſſum et ingredietur, conſideretur; nulla eſt ratio, quare potius in hoc maiorem minoremue habeat celeritatem, quam in illo loco, quocirca perpetuo eadem moueri debebit celeritate. Q. E. D.

Corollarium.

64. Quoties igitur corpus motum vel celerius vel tardius ingredi videmus, cauſae externae hanc mutationem adſcribere debemus.

PROPOSITIO 9.
Theorema.

65. *Corpus abſoluto motu praeditum progredietur in linea recta, ſeu ſpatium, quod deſcribit, erit linea recta.*

Demonſtratio.

Nulla eſt enim ratio, ſi corpus hoc in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, quare in hanc potius quam aliam regionem a linea recta declinaret. Ex quo concludendum eſt, hoc ab ipſa corporis natura pendere, vt motum in linea recta progrediatur. Quamobrem in mundo etiam, vbi quidem hoc ſufficientis rationis principium ceſſat, nihilominus ſtatuendum eſt, omne corpus motum in directum progredi debere, niſi ſcilicet impediatur. Q. E. D.

Co-

Corollarium I.

66. Ex his duabus propoſitionibus conficitur iſta lex vniuerſalis: omne corpus motu praeditum aequabiliter in linea recta progredi.

Corollarium 2.

67. Corpus ergo quod a cauſis externis coactum fuit in linea curua AM progredi, ſi cum in M peruenerit, cauſae hae externae ſubito ceſſent, tum ea celeritate, quam habebat in M aequabiliter ſecundum directionem, quam ipſo tempore liberationis habuit, in recta progredietur. Eſt vero tangens MT nil aliud, niſi curuae elementum in M in directum productum, quamobrem, corpus in M ſibi relictum in tangente MT aequabiliter ea celeritate, quam in M habuit, progredietur. Tab. I. Fig. 7.

Scholion I.

68. Has de abſoluta quiete et motu leges auctores in vna ſunt complexi. Hancque *Neutonus* in Principiis Phil. ita proponit, vt dicat: Omne corpus perſeuerare in ſtatu ſuo quieſcendi vel mouendi vniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Corollarium 3.

69. Pertinent autem hae leges de motus continuatione ad motus tantum abſolutos, neque eae in motibus relatiuis vim ſuam retinent. Quemadmodum enim fieri poteſt, vt corpus relatiue quieſcens non perſeueret in quiete, etiamſi a nullis cau-

ſis externis agitetur (59.), ita etiam corpora motum habentia relatiuum non ſemper aequabiliter in directum relatiue mouebuntur.

Corollarium 4.

70. Quando igitur corpus a nullis cauſis externis eſt ſollicitatum, id, quomodocunque inaequabiliter relatiue moueatur, tamen vel abſolute quieſcere vel vniformiter in directum moueri cenſendum eſt. Ex hocque quodammodo poteſt intelligi, quantum ſtatus relatiuus ab abſoluto differat.

Scholion 2.

71. In Aſtronomiae principiis mechanicis, prout a *Neutono* ſunt tradita, ſtatuuntur ſol et ſtellae fixae a cauſis externis vel omnino non affici, vel tam parum, vt effectus ſit inſenſibilis. Quanquam igitur ſolem neque aequabiliter neque in directum progredi videmus reſpectu terrae, tamen eum abſolute vel quieſcere vel vniformiter in directum moueri certum erit. Difformitates ergo illae in motu ſolis obſeruatae in ipſa terra poſitae ſint neceſſe eſt.

DEFINITIO 8.

72. Motus directio ſiue determinatio eſt linea recta in qua corpus motum vniformiter progredi conatur, et re ipſa progreditur, niſi a cauſis externis impediatur.

Corollarium.

73. Corpus igitur habens motum abſolutum, niſi ab aliis cauſis afficiatur, perpetuo eandem motus directionem eandemque celeritatem conſeruabit.

DE-

DEFINITIO 9.

74. Vis inertiae eſt illa in omnibus corporibus inſita facultas vel in quiete permanendi, vel motum vniformiter in directum continuandi.

Corollarium 1.

75. Quanquam enim permanſionem in quiete, motusque vniformem continuationem in directum ex principio ſufficientis rationis demonſtrauimus, tamen iam notauimus hanc non eſſe cauſam phaenomeni efficientem, ſed eam in ipſa corporis natura eſſe ſitam. Haec igitur ex corporum natura pendens cauſa ſtatus ſui conſeruationis eſt id, quod vis inertiae appellatur.

Scholion.

76. *Keplerus*, qui primus hanc vocem formauit, tribuit eam ei vi, quam omnia habent corpora, reſiſtendi omni illi, quod ea de ſtatu ſuo deturbare conatur; atque haec vox inertiae melius cum hac reſiſtentiae ideae congruit, quam illa perſeuerantiae, cum qua nos coniunximus. Sed facile intelligitur has definitiones re a ſe inuicem non differre, eadem enim eſt vis motum vel quietem continuans, et quae impedimentis reſiſtit. Malui vero hac vti definitione, quam Kepleriana, quia nondum conſtat, quomodo corpora viribus ſollicitantibus reſiſtant. Praeterea vero haec ipſa reſiſtendi vis originem habet ſuam ab hac quietem motumue continuandi facultate; ideoque ex hac debet explicari.

PROPOSITIO 10.

Theorema.

77. *Quando ſpatium, ex quo motus relatiuus determinatur, abſolute vel quieſcit vel mouetur vniformiter in directum; tum leges datae de motu et quiete etiam in ſtatu corporum relatiuo valebunt.*

Demonſtratio.

Si ſpatium ex quo motus relatiuus diiudicatur abſolute quieſcit, propoſitum per ſe eſt clarum; Nam hoc caſu quies et motus relatiui cum abſolutis congruunt, adeoque omne corpus etiam relatiue vel perpetuo quieſcet vel vniformiter mouebitur in directum (10.). Sin vero illud ſpatium ipſum moueatur vniformiter in directum, tum ea corpora, quae relatiue quieſcunt, eundem habebunt motum abſolutum, quem habet ipſum ſpatium. Quare ea quoque vniformiter indirectum progrediuntur, huncque motum ex ſua natura poterunt continuare: vt igitur et hoc caſu lex (66.) obſeruetur. Corpus vero quod relatiue mouetur vniformiter in directum, id etiam, ſi ipſum ſpatium vniformem habet motum rectilineum, aequabiliter in recta progredietur abſolute, quemadmodum tum ex ſequente apparebit propoſitione, tum per ſe perſpicuum eſt. Motus ergo hic relatiuus quoque legi eſt conſentaneus et propterea ſine vi externa continuari poterit. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

78. Corpus igitur a nulla cauſa externa affectum, quod relatiue vel quiescit vel vniformiter mouetur in directum, indicio erit ipſum ſpatium ad quod eius motus iudicatur, abſolute vel quiescere, vel in directum aequabiliter moueri.

Corollarium 2.

79. Talis quoque motus relatiuus in ſuo ſtatu per ſe ipſum perpetuo conſeruabitur. Non ſolum enim ipſum, quod mouetur, corpus abſolute mouetur vniformiter in directum; ſed etiam ſpatium illud, quo relatio aeſtimatur, iuxta eandem legem progreditur. Quamobrem vterque motus per ſe continuabitur, atque motus relatiuus iſte in hoc ſtatu nulla accedente cauſa externa perſeuerabit.

Corollarium 3.

80. Quia omnis idea, quam de motu habemus eſt relatiua (7.), hae quoque leges non ſufficiunt ad cognoſcendum, qualis ſit cuiuspiam corporis motus abſolutus. Quando enim corpus a nulla cauſa externa affectum aequabiliter in recta progredi videmus, plus inde concludere non poſſumus, quam hoc corpus etiam abſolute vel vniformiter in directum moueri vel quiescere. Quantus vero ſit eius motus abſolutus definire non licet, neque quam habeat directionem.

Corollarium 4.

81. Quae igitur ex hac corporum natura, quod in ſtatu ſuo vel quietis vel motus vniformis in-

rectum permaneant, deducentur, non ſolum ad motum et quietem abſolutam pertinebunt, ſed etiam ad eum ſtatum relatiuum, quo ſpatium corpusue, ex quo motus aeſtimatur, vniformiter in directum progreditur.

Scholion.

82. Atque etiam non admodum erimus ſolliciti de motu abſoluto, cum iſte relatiuus iisdem contineatur legibus. Et propterea motum hunc relatiuum ipſum ſaepius mutabimus in alios huiusmodi: ita tamen vt traditae leges obſeruentur; ſi ſcilicet eum, relatione ad aliud corpus vniformiter in directum quoque progrediens facta, contemplabimur. Qua ratione non ceſſabit aequabiliter in recta progredi, idque innumerabilibus modis fieri poteſt, ex quibus, qui commodiſſimus erit, ſeligi poterit.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. I. Fig. 8. 83. *Moueatur corpus abſolute aequabiliter in recta* AL, *aliudque corpus aequabiliter quoque in recta* AM. *Quaeritur corporis in* AL *abſoluto motu lati motus relatiuus reſpectu corporis alterius in* AM *progredientis.*

Solutio.

Sit celeritas corporis in AL progredientis, a; et celeritas alterius in AM moti, b: ſimulque egrediantur haec corpora ex puncto A. Perſpicuum eſt ſi ſumantur duo ſpatia AL, AM in ratione celeri-

ta-

tatum a et b, ambo corpora eodem momento in L et M peruenire. Ducta igitur recta ML cum recta AM angulum faciente AML, cuius ſinus eſt ad ſinum anguli ALM, quem cum AL efficiet, vt AL ad AM i. e. vt a ad b, deſignabit L locum, in quo repe- rietur corpus in AL progrediens eodem momento, quo alterum in M exiſtit. Quia vero corporis illius motus relatiuus reſpectu huius deſideratur, hoc, quod in AM reuera mouetur, vt quiescens in A debet conſiderari. Puncto igitur M cogitatione in A translato, perueniet L in N ducta AN parallela et aequali ipſi ML ex A. Simili modo quando corpus in AM motum peruenit in locum proximum m, alterum in l reperietur, eritque ml parallela ipſi ML, quia $Mm:Ll=b:a=AM:AL$. Puncto vero m ſimili modo in A translato ſumendo $An=ml$ perueniet l in n, eritque n in eadem recta AN. Ex quo ſequitur corpus abſolute in AL motum relatiue in recta AN moueri. Celeritas autem relatiua erit ad abſolutam vt Nn ad Ll, ſeu vt ML ad AL. Quae ratio cum ſit conſtans ob triangulum ALM ſpecie datum corpus abſolute in AL aequabiliter motum, relatiue quoque aequabiliter in recta AN progredietur. Poſitio vero rectae AN inuenietur ſumendo angulo LAN tanto, vt eius ſinus ſit ad ſinum anguli NAM, vt b ad a. Celeritas denique abſoluta per AL erit ad celeritatem relatiuam per AN, vt ſinus anguli MAN ad ſinum anguli LAM. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

84. Corpus igitur abſolute aequabiliter in directum progrediens, quoque relatiue aequabiliter in directum promouebitur, ſi modo corpus, ex quo relatio iudicatur, quoque aequabiliter in directum progrediatur. Atque hoc eſt quod in praecedente demonſtratione (77.) aſſumſimus.

Corollarium 2.

85. Conſtructio ceterum lineae AN et celeritatis relatiuae inuentio facillime hoc modo inſtitui poteſt. Sumtis, vt iam fecimus, AL et AM in ratione *a* ad *b* ductaque ML, ducatur huic ML parallela AN ex A, erit haec via motu relatiuo deſcripta. Celeritas vero relatiua erit ad abſolutam, vt ML ad AL.

Corollarium 3.

86. Idem ratiocinium valet, ſi AL non motu abſoluto, ſed relatiuo percurratur, et AM eadem relatione. Tum vero prodibit corporis per AL moti alius motus relatiuus reſpectu corporis AM lati.

Corollarium 4.

87. Patet igitur, quomodo motus abſolutus in infinitos relatiuos poſſit transmutari, qui ſemper erunt aequabiles et in directum fient, ſi modo motus abſolutus fuerit huiusmodi, et motus eorum corporum, ex quibus relatiui oriuntur.

Scho-

Scholion.

88. Aſſumſimus in ſolutione ambo corpora ex eodem loco A egredi: ſed ſolutio non minus ſuccedit, ſi ambo corpora in principio in diuerſis punctis A et B fuerint poſita. Nam progrediatur corpus A motu abſoluto aequabiliter in recta AL, alterum vero B ſimiliter in recta BM, ita vt celeritates ſint vt *a* ad *b*. Sumantur AL et BM in eadem ratione *a* ad *b*, peruenient ambo corpora ſimul in L et M. At quia corporis A motus relatiuus reſpectu corporis B requiritur, corpus B vt quiescens in B debet conſiderari. Transferatur ergo cogitatione corpus B ex M in B, perueniet corpus A ex L in N, ducendo BN parallelam et aequalem ipſi ML: dico punctum N fore in recta per A tranſeunte, ita vt corpus A relatiue moueatur in recta AN, idque aequabiliter. Ducta enim NL aequalis erit et parallela ipſi BM. His factis ſpecie datur triangulum ANL: quare NL ad AL habebit rationem datam, ergo ob NL=BM, erit ratio AL ad BM data, quae ergo ſi ſemel ſumta fuerit in ratione *a* ad *b*, ſemper erit eadem. Ex quo apparet punctum N eſſe in recta AN et celeritatem relatiuam per AN eſſe ad abſolutam per AL, vt AN ad AL i. e. in ratione data. Motus igitur relatiuus per AN fiet in recta, eritque aequabilis. Tab. I. Fig. 9.

Corollarium 5.

89. Si igitur detur corporis A motus abſolutus per rectam AL, eiusque relatiuus aequabilis per

AN quacunque celeritate, poterit inueniri motus corporis B, cuius reſpectu motus relatiuus corporis A oritur. Sumtis enim duobus ſpatiis AL et AN eodem tempore percurſis, ducatur per punctum quoduis arbitrarium B recta BM parallela ipſi NL, determinabit haec viam a corpore B percurſam, eiusque celeritas erit ad celeritatem corporis A abſolutam per AL vt eſt NL ad AL. Erit vero corpus B in B eodem tempore, quo eſt A in A.

Corollarium 6.

90. Dantur ergo innumerabiles motus corporis B, quia punctum B pro lubitu poteſt aſſumi, ex quibus motus relatiuus corporis A idem prouenit. At corporis B celeritas ſemper erit eadem, eiusque directio ſecundum parallelam ipſi NL.

Corollarium 7.

91. Intelligitur etiam motum abſolutum aequabilem in directum tendentem transmutari poſſe in relatiuum quemcunque itidem aequabilem et in recta factum. Poteſt enim recta AN pro arbitrio duci, et celeritas per eam poni quaecunque. Semper enim datur motus aequabilis quoque et recta progrediens corporis B, ex quo hic motus relatiuus exiſtit.

Corollarium 8.

92. Motus deinde iſte relatiuus per ſe ſine vlla vi externa poterit continuari. Motus enim abſoluti per AL et per BM, quia fiunt aequabiliter

in

in lineis rectis, per ſe continuantur. Quamdiu vero iſti motus durant, tamdiu etiam relatiuus per AN continuare debet.

PROPOSITIO 12.

Problema.

93. *Moueatur corpus* A *abſolute quomodocunque in linea* AL, *et corpus* B *in linea* BM. *Requiritur motus relatiuus corporis* A *reſpectu corporis* B. Tab. I. Fig. 10.

Solutio.

Abſcindantur in curuis AL et BM arcus, qui aequalibus temporibus percurruntur, AL et BM. Reperietur ergo corpus A in L, quando B in M pertingit. Sed quia corporis A motus relatiuus reſpectu B deſideratur, corpus B vt quiescens in B debet conſiderari. Quare transferatur id cogitatione ex M per rectam MB in B, perueniетque corpus L in N, ducta LN parallela et aequali ipſi MB. Curua igitur in qua eſt punctum N hoc modo inuentum, erit via a corpore A motu relatiuo deſcripta. Atque hoc motu relatiuo arcus AN eodem tempore percurretur, quo arcus AL et BM abſoluuntur. Ex quo celeritas relatiua in N quoque innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

94. Determinari igitur hoc modo poterit motus relatiuus corporis quocunque motu lati reſpectu corporis quomodocunque etiam moti.

Corollarium 2.

95. Intelligitur etiam ex ſolutione, quomodo datis curuis AN et AL vna cum motibus per eas inueniri poſſit curua BM et motus per eam. Nec non definietur curua AL ex curuis BM et AN.

Corollarium 3.

96. Perſpicuum quoque eſt curuam BM ob punctum B arbitrarium infinitis modis poſſe aliter eſſe poſitam. Quia tamen arcus BM, qui eodem tempore, quo AL et AN, deſcribitur, ſubtenſa BM ſemper eſt aequalis et parallela lineae LN, ea ſemper erit ſibi ſimilis et aequalis et parallela, atque motus per eam perpetuo idem.

Scholion.

97. Et haec ſunt, quae de comparatione motuum abſolutorum et relatiuorum afferenda iudicaui. Motus autem relatiuus alias hoc modo ſolet deſcribi, vt motus per AN dicatur motus corporis A, quod reuera in linea AL mouetur, qualis ex corpore B in BM moto ſpectatur. Spectator vero in corpore B relatiue quiescens ponitur, et ipſum B vt quiescens conſiderans. Ita motus ſtellarum relatiuus reſpectu telluris, congruit cum eo motu, quem nos in terra degentes eamque tanquam quiescentem conſiderantes intuemur. Terra enim ex B in M promota et ſtella ex A in L, videmus eam ex M ſecundum plagam ML et in diſtantia ML. Quia vero nos de loco B motos eſſe non apprehendimus, ſed etiam nunc in B conſiſtere putamus, videbimus ſtel-

lam

lam ex B non in L, ſed in N, eadem ſcilicet plaga eademque diſtantia. Propterea recta BN aequalis erit et parallela rectae ML, vt noſtro conſiderandi modo inuenimus.

SCHOLION GENERALE.

98. Iſtae motus leges, quas corpus ſibi relictum vel quietem vel motum continuando obſeruat, ſpectant proprie ad corpora infinite parua, quae vt puncta poſſunt conſiderari. In corporibus enim finitae magnitudinis quorum ſingulae partes alios habent motus inſitos, quaelibet pars quidem has leges obſeruare conabitur, quod autem non ſemper propter corporis ſtatum fieri poteſt. Corpus igitur ipſum eum ſequetur motum, qui ex ſingularum partium conatibus componitur, isque adhuc ob inſufficientiam principiorum non poteſt definiri, ſed haec tractatio ad ſequentia eſt differenda. Diuerſitas igitur corporum ſuppeditabit nobis operis diuiſionem primariam. Primo enim contemplabimur corpora infinite parua ſeu quae tanquam puncta ſpectari poſſunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae ſunt rigida neque figuram ſuam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extenſionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum ſolutorum motus examini ſubiiciemus, quorum alia impediunt, quin motus ſuos poſſint, vt conantur, abſoluere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum. De his vero corporibus non ſolum videbimus, quomodo ſibi

relicta motus continuent; ſed praeterea inquiremus, quomodo ea a cauſis externis ſcilicet potentiis afficiantur. Denique in his omnibus disquiſitionibus magnam inferet varietatem ſtatus corporum vel liber vel non liber. Per ſtatum non liberum hic intelligo, quando corpora impediuntur, quo minus in ea directione progrediantur, qua conantur; cuiusmodi eſt motus corporum pendulorum, quae, quia non poſſunt directe, vti conantur, deſcendere, oscillationes efficiunt. Ex quo intelligitur ſtatum liberum eſſe, quando corpora nullum inueniunt impedimentum in quamuis plagam progrediendi, in quam tum ex propria vi tum a potentiis ſollicitata tendunt. Apparet igitur, quibus de rebus in Mechanica ſit agendum, et quam ſint multa, quae etiam nunc nequidem ſunt libata. Nam praeter motum punctorum, quae adhuc ſunt tractata, tam pauca ſunt, vt fere omnia demum inuenire et ex principiis deriuare neceſſe ſit. Incipio igitur a motu punctorum liberorum a potentiis quibuscunque ſollicitatorum, quia, quos ſibi ipſa relicta ſequantur motus, hoc capite iam eſt oſtenſum. Hanc ob rem primum iſtum Tomum motui punctorum libero deſtinaui, in ſequente vero punctorum motum non liberum pertractare conſtitui; in quorum vtroque, quae occurrent, cum ex his iam traditis, tum ex ſequentibus principiis methodo analytica ſum deriuaturus.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM
DE
EFFECTU POTENTIARUM IN PUNCTUM LIBERUM AGENTIUM.

DEFINITIO 10.

99.

Potentia eſt vis corpus vel ex quiete in motum perducens, vel motum eius alterans. *Huiusmodi vis, ideoque et potentia eſt grauitas, per eam enim corpora, remotis impedimentis, ex quiete deorſum delabuntur, motusque ipſe deſcenſus ab ea continuo acceleratur.*

Corollarium I.

100. Omne corpus ſibi relictum vel in quiete perſeuerat, vel motu aequabili in directum progreditur. Quoties igitur euenit, vt corpus liberum, quod quiescebat, moueri incipiat, aut motum vel non aequabiliter vel non in directum progrediatur, cauſa eſt potentiae cuidam adſcribenda: quicquid enim corpus de ſtatu ſuo deturbare valet, potentiam appellamus.

Scholion I.

101. Doctrina de potentiis, quatenus plures corpori applicatae in aequilibrio conſiſtunt, corpusque in quiete conſeruant, iam in ſtatica eſt expoſita. Ibique potentia ita quoque eſt definita, vt denotet omne id, quod corpora mouere valet. Motus

tus vero ipſe in ſtatica non conſideratur, ſed ii tantum caſus inueſtigantur, quibus plures potentiae ſeſe deſtruunt, corpusque, in quod agunt, in quiete permanet. Nunc autem in Mechanica explicandum eſt, quomodo potentiae in corpus agentes, quae inter ſe non ſunt contrariae, re ipſa motum producant in corpore quieſcente, in moto vero motum immutent.

Scholion 2.

102. Vtrum huiusmodi potentiae ex ipſis corporibus originem ſuam habeant, an vero per ſe tales dentur in mundo, hic non definio. Sufficit enim hoc loco potentias in mundo reuera exiſtere, id quod vel ſola vis grauitatis, qua omnia corpora terreſtria deorſum delabi conantur, docet. Praeterea vero huiusmodi vires corpora ſollicitantes conſpicuuntur in motibus planetarum, qui niſi a quadam potentia eſſent affecti, vniformiter in lineis rectis progredi deberent. Similes etiam potentiae deprehenduntur in corporibus magneticis et electricis ineſſe, quae certa tantum corpora attrahunt. Quas omnes a motu materiae cuiusdam ſubtilis oriri alii putant, alii ipſis corporibus vim attrahendi et repellendi tribuunt. Quicquid autem ſit, videmus certe ex corporibus elaſticis et vorticibus huiusmodi potentias originem ducere poſſe, ſuoque loco inquiremus, num ex inde phaenomena haec potentiarum explicari poſſint. Interim vero potentiarum quarumuis in corpora effectus determinare

co-

conabimur, quo deinceps, cum ad eorum plenio-rem cognitionem peruentum fuerit, ſtatim, quae eruta ſunt, ad eas accommodari queant.

DEFINITIO II.

103. Directio potentiae eſt linea recta, ſecundum quam ea corpus mouere conatur. *Ita grauitatis directio eſt linea recta verticalis, corpora enim grauia ſecundum eam delabi conatur.*

Scholion 1.

104. In ſtatica, vbi omnia in quiete permanere ponuntur, omnes potentiae ſuas directiones perpetuo easdem ſeruare ſtatuuntur. At in mechanica, cum corpus perpetuo in alium perueniat locum, potentiae in id agentis directio continuo mutabitur: Pro diuerſis enim corporis locis vel potentiae directiones erunt inter ſe parallelae, vel ad fixum punctum conuergentes, vel aliam tenebunt legem, ex quo tam multiplex potentiarum in mechanica tractatio oritur.

Scholion 2.

105. Potentiarum diuerſarum comparatio et menſura ex ſtatica quoque eſt repetenda. In qua traditum eſt potentiam aliquam a ſe habere ad aliam b vt m ad n, quando potentia a puncto A, n vicibus Tab. I.
ſecundum directionem AB applicata, et potentia b, m Fig. 11.
vicibus ſecundum directionem contrariam AC, punctum A perſeuerat in aequilibrio. Tum enim potentia a, n vicibus ſumta aequiualet potentiae b, m vicibus ſumtae, eritque $na = mb$ ſeu $a:b = m:n$.

Scholion 3.

106. In hoc vero differt menſura potentiarum mechanica a ſtatica, quod in hac omnes magnitudinem eandem retinere ponuntur, in mechanica vero, vt perueniente corpore in alium locum earum directiones mutabiles ponuntur; ita earum quantitas ſecundum certam legem variabilis eſſe poteſt.

PROPOSITIO 13.

Theorema.

107. *Quando punctum a pluribus potentiis eſt ſollicitatum, eundem ab iis adipiscetur motum, ac ſi ab vnica iis omnibus aequiualente fuiſſet ſollicitatum.*

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 12. Sit punctum A ſollicitatum a potentiis AB, AC, AD, AE, quibus aequiualeat potentia AM. Sumatur huic aequalis et contrarie poſita AN, haec, vt ex ſtatica notum eſt deſtruet actionem potentiarum AB, AC, AD, AE. Primo igitur momento potentia AN tantum imprimeret puncto A motum ſecundum, AN quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agentes ei imprimerent ſecundum earum mediam directionem, quae eſt AM. Potentia vero AM ſola, quia aequalis eſt potentiae AN, tantum quoque promouebit punctum A verſus AM, quantum AN verſus AN. Quare potentia AM tantum etiam puncto A imprimet motum ſecundum AM, quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agen-

tes

tes ſecundum eandem directionem AM. In vtroque igitur caſu effectus erit idem. Q. E. D.

Corollarium I.

108. Si igitur punctum a pluribus potentiis ſollicitetur, poterit id tanquam ab vnica ſollicitatum conſiderari, quae iis omnibus eſt aequiualens.

Corollarium 2.

109. Atque viciſſim loco vnius potentiae in punctum agentis, poſſunt plures in id agentes conſiderari, quibus illa aequiualeat: id quod, vt ex ſtatica manifeſtum eſt, infinitis modis fieri poteſt.

Scholion.

110. Quia vero, quam primum corpus de loco ſuo eſt motum, potentiae in id agentes directiones ſuas et magnitudines mutant vel mutare ponuntur; potentia quoque aequiualens quouis momento erit alia. Hanc ob rem quouis momento potentiarum punctum ſollicitantium aequiualens debet inueſtigari, neque id diutius ab eadem potentia affici ponendum eſt quam per temporis elementum infinite paruum.

DEFINITIO 12.

111. Potentia abſoluta eſt potentia, quae in corpus ſiue motum ſiue quieſcens aequaliter agit. *Huiusmodi potentia abſoluta eſt vis grauitatis, quae corpora ſiue moueantur ſiue quieſcant aequaliter deorſum trahit.*

Corollarium.

112. Si igitur cognitus fuerit potentiae abſolutae effectus in corpus quieſcens, innoteſcet quoque eius effectus in corpus vtcunque motum.

DEFINITIO 13.

113. Potentia relatiua eſt, quae aliter agit in corpus quieſcens, aliter in motum. *Huiusmodi potentia eſt vis fluuii corpus ſecum abripientis, quo enim celerius corpus mouetur, eo vis fluuii in id fit minor: eaque prorſus euaneſcit, quando corpus iam eandem, quam habet fluuius, celeritatem eſt adeptum.*

Corollarium 1.

114. Si igitur data ſit corporis celeritas vna cum lege potentiae relatiuae, inueniri poterit vis, quantum potentia in corpus agit. Haecque deinde vt potentia abſoluta poterit conſiderari, quamdiu corpus eandem habet celeritatem, eiusque effectus ex potentiarum abſolutarum actione determinari. Vim enim potentiae relatiuae in corpus data celeritate motum determinare, nil aliud eſt, niſi potentiam abſolutam hoc caſu aequiualentem aſſignare.

Corollarium 2.

115. Hoc igitur differunt a ſe inuicem potentiae abſolutae et relatiuae, quod potentiae abſolutae quantitas et directio a ſolo corporis, in quod agit, loco pendeat; relatiuae vero quantitas et directio inſuper a corporis, in quod agit, celeritate.

Scho-

Scholion 1.

116. Reſpiciunt potiſſimum potentiae relatiuae ad motum corporum in fluidis, horum enim actio in corpora a celeritate eorum pendet relatiua; quae, quo eſt maior, eo quoque maiorem vim corpus a fluido patitur. Praeter alios autem caſus motuum in fluidis, qui maiorem cognitionem fluidorum requirunt, duo ſunt tractatu faciliores; alter quando fluidum quiescit, alter quando mouetur vniformiter in directum. Poterit vero iſte ad illum ſubſtituendo motum relatiuum loco abſoluti ſemper reduci; fluidum ſcilicet vt quiescens conſiderandum eſt, in quo ſtatu quoque vi propria permanebit. Quae igitur in ſequentibus de potentiis relatiuis proferentur, ea ad motum corporum in fluidis quiescentibus potiſſimum pertinebunt. Actio vero fluidorum in corpora mota conſiſtit tota in motu eorum diminuendo, et propterea reſiſtentia appellatur, quae, quo celerius corpora mouentur, maior eſt quoque, et euanescit omnino, quando corpora quiescunt. Hanc ob rem in poſterum loco potentiarum relatiuarum media reſiſtentia ſubſtituemus; motus vero, qui a ſolis potentiis abſolutis afficiuntur, in vacuo fieri ponemus.

Scholion 2.

117. Motus quidem in mediis reſiſtentibus, ſi maxime ordinem ſequi vellemus, ad vltimam partem, quae fluidis eſt deſtinata, eſſet referenda, cum etiam nunc non conſtet, qua lege fluida cor-

poribus in iis motis reſiſtant. Verum quia haec materia a plerisque ita tractari eſt ſolita, vt prorſus a fluidorum natura ſit reuocata, et vti hypotheſis pure mathematica conſiderata: hanc methodum retinere malui, quam plurima elegantia problemata praeterire, quae in tractatiooe de fluidis etiam lócum non inueniunt. Attamen hanc medii reſiſtentiam non niſi punctorum motui accommodabo, pro corporibus enim finitae magnitudinis calculus fieret inſuperabilis. Quando autem corpora inſtar punctorum conſiderari poſſunt, hoc inde nascitur commodum, quod directio vis reſiſtentis congruat cum motus directione, ſi quidem ea a fluido quiescente oriatur. Hanc ob rem in hac de motu punctorum tractatione potentiis relatiuis eandem ſemper directionem tribuemus, quam habet ipſum punctum, eamque ſemper vt motum diminuentem conſiderabimus.

PROPOSITIO 14.

Problema.

118. *Dato effectu potentiae abſolutae in punctum quiescens, inuenire effectum eiusdem potentiae in punctum idem quomodocunque motum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 1. Sit punctum in A poſitum, vnde moueatur celeritate c ſecundum directionem AB, potentiae vero in id agentis directio ſit AC. Aſſumatur temporis aliquod elementum dt, hocque tempusculo protrahatur punctum A, ſi quiesceret in A, per ſpatiolum

olum AC, quod vocetur dz, ita vt poſt tempus dt non amplius ſit in A, ſed in C. Hic motus igitur per AC erit effectus potentiae in punctum quieſcens. Effectus vero eiusdem potentiae, quia ponitur abſoluta in idem punctum motum aequalis eſſe debet effectui in quieſcens (111.). Abſcindatur nunc in puncti A directione, quam habet ſecundum AB, ſpatium AB, quod celeritate ſua c tempuſculo dt percurret, ſi a nulla potentia ſollicitaretur, erit AB $= cdt$ (30.). Agente vero potentia poſt temporis elementum dt punctum non reperietur in B, ſed alibi in D, ita vt effectus, qui menſurandus eſt deuiatione a puncto B, quae eſt ſpatium BD, aequalis ſit effectui eiusdem potentiae in punctum quieſcens (111.) i. e. AC. Erit ergo BD$=$AC. Praeterea vero erit BD ipſi AC parallela, quia BD eſt effectus potentiae, ideoque in eius directionem incidere debet, quae durante tempuſculo infinite paruo dt non mutatur. Quamobrem punctum A celeritatem c habens ſecundum directionem AB, et ſollicitatum a potentia abſoluta, elapſo tempuſculo dt, non in B, ſed D reperietur, ducta BD aequali et parallela ipſi AC. Spatia vero infinite paruo tempuſculo percurſa, vt lineolae rectae poſſunt conſiderari; propterea punctum tempuſculo dt ſpatium AD percurriſſe cenſendum eſt. Q. E. I.

Corollarium I.

119. Quia etiam motus per ſpatiola infinite parua pro aequabilibus haberi poſſunt, (33.) erit celeritas, qua elementum AD percurritur $= \frac{AD}{dt}$ (30.)

Co-

Corollarium 2.

120. Ponatur celeritas per AD$=c+dc$, quia praecedens erat c (35.), erit $c+dc=\frac{AD}{dt}$, at ante erat AB$=cdt$, ex quo fit $c=\frac{AB}{dt}$. Prodit ergo $dc=\frac{AD-AB}{dt}$. Abſcindatur igitur in AD portio Ab=AB, erit $dc=\frac{Db}{dt}$.

Scholion 1.

121. Notandum autem eſt AC vel BD infinities eſſe minorem, quam AB, nam AB eſt ſpatium celeritate finita tempore dt percurſum, at AC ſpatiolum celeritate infinite parua eodem tempore abſolutum, corpori enim quiescenti nulla potentia finitam celeritatem tempusculo infinite paruo poteſt inferre.

Corollarium 3.

122. Hanc ob rem angulus BAD erit infinite paruus, et iunctis punctis B et b, lineola Bb erit in AD perpendicularis. Vocetur ſinus anguli BAC, quippe qui datur k, poſito ſinu toto 1, erit ſinus ang. BDb etiam k, quia illi eſt aequalis, ſinus vero ang. DBb erit $\sqrt{(1-kk)}$. Ex his, quoniam eſt BD$=$AC$=dz$, erit D$b=dz\sqrt{(1-kk)}$ et B$b=kdz$.

Corollarium 4.

123. Incrementum igitur celeritatis dc, quod ante inueneramus $=\frac{Db}{dt}$, erit $\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$. Intelligitur vero dz eſſe infinities minus quam dt, eſt enim dz infinite paruum reſpectu AB i. e. cdt, ideoque etiam reſpectu ipſius dt, quia c ponitur finitae magnitudinis.

Co-

Corollarium 5.

124. Inuento celeritatis incremento dc a potentia illato, conſiderandus quoque eſt angulus BAD declinationem puncti ab inſita directione AB repraeſentans, quae itidem a potentia producitur. Eſt vero eius ſinus $= \frac{Bb}{AB} = \frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 6.

125. Duplex igitur eſt effectus potentiae punctum motum ſollicitantis. Alter in celeritate immutanda conſiſtit, alter in eius directione. Ille dat incrementum celeritatis $dc = \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$, hic vero anguli declinationis ſinum $= \frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 7.

126. Si angulus BAC fuerit rectus, ideoque $k = 1$; erit $dc = 0$. Hoc igitur caſu celeritas a potentia manet immutata. Anguli vero declinationis BAD ſinus fit $= \frac{dz}{cdt}$.

Corollarium 8.

127. Si angulus BAC fit obtuſus ſeu recto maior erit eius coſinus $\sqrt{(1-kk)}$ negatiuus, et propterea celeritatis incrementum dc prodibit negatiuum $= \frac{-dz\sqrt{(1-kk)}}{dz}$. Id quod indicat, celeritatem a potentia diminui. Declinatio vero $\frac{kdz}{cdt}$ eadem manet, quae ante.

Corollarium 9.

128. Si potentiae directio AC cum motus puncti A directione AB congruit, fit $k = 0$. Hoc

 igi-

igitur caſu motus directio a potentia non immutatur. Celeritatis vero incrementum dc fiet $=\frac{dz}{dt}$, ſi potentiae directio conſpirat cum directione motus. Sin autem ei fuerit contraria, fit $dc=\frac{-dz}{dt}$.

Scholion 2.

129. Apparet itaque ex huius propoſitionis ſolutione, quomodo potentiae abſolutae effectus in punctum quomodocunque motum inueniri debeat, ſi cognitus fuerit effectus eiusdem potentiae in idem punctum quieſcens. Hanc ob rem in ſequentibus huius capitis propoſitionibus ſufficiet punctum a potentiis ſollicitatum quieſcens ponere, vel motum in eadem, quam habet potentia, directione. Nam ſi punctum A habeat celeritatem c, eaque moueatur ſecundum directionem AB; interea vero ſollicitetur a potentia eandem habente directionem AB, ita vt elapſo tempuſculo dt non in B, quo ſola celeritate c latum perueniret, ſed in b reperiatur, erit potentiae effectus ſpatiolum Ab. Atque per tantumdem ſpatiolum ao punctum A, ſi in a quieſceret, fuiſſet eodem tempuſculo dt pertractatum. Innoteſcit ergo ex motu puncti A a potentia ſollicitati effectus eiusdem potentiae in idem punctum quieſcens, porroque hinc effectus potentiae in punctum vtcunque motum.

Tab. II. Fig. 2.

PROPOSITIO 15.
Problema.

130. *Dato celeritatis incremento, quod quaedam potentia in puncto* A *tempuſculo* dt *producit, inuenire*

nire incrementum celeritatis, quod eadem potentia in eodem puncto tempusculo $d\tau$ *producit.*

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c eandemque directionem AB, quam habet potentia id ſollicitans, ſitque ao ſpatiolum, per quod haec potentia punctum A, ſi quieſceret, tempuſculo dt traheret. Sit porro AB ſpatium, quod punctum A celeritate c tempuſculo dt percurrit, percurret idem inſuper a potentia ſollicitatum ſpatium Ab, ſumto Bb=ao: hocque ſpatium quia eſt infinite paruum aequabili motu deſcripſiſſe aeſtimandum eſt. Sequente igitur tempuſculo dt hac celeritate percurreret ſpatium bC=Ab, niſi a potentia ſollicitetur; at agente iterum potentia, quae immutata manere ponitur ſaltem per tempus infinite paruum, perueniet id vltra C in c, ſumto Cc=ao. Simili modo tertio tempuſculo dt, percurret ſpatium cd=cD+Dd, vbi cD=bc et Dd=ao. Et quarto tempuſculo dt percurret ſpatium de=dE=Fe, vbi rurſus eſt dF=cd et Fe=ao. Eſt vero Ab=AB+ao; bc=AB+$2ao$; cd=AB+$3ao$; de=AB+$4ao$. Erit ergo $\frac{ao}{dt}$ incrementum celeritatis tempuſculo dt productum a potentia; $\frac{2ao}{dt}$ erit celeritatis incrementum tempuſculo $2dt$ acquiſitum; ſimiliter $\frac{3ao}{dt}$ incrementum tempuſculi $3dt$: et generaliter tempuſculo ndt creſcet celeritas puncti c elemento $\frac{nao}{dt}$. Ponatur $ndt=d\tau$, erit $n=\frac{d\tau}{dt}$. Celeritatis igitur incrementum tempuſ-

 culo

culo $d\tau$ acquiſitum erit $\frac{ao.d\tau}{dt^2}$. Quia vero pro tempuſculo dt incrementum celeritatis eſt $\frac{ao}{dt}$, prodibit iſta analogia; Celeritatis incrementum temp. dt eſt ad celeritatis incrementum temp. $d\tau$ acquiſitum vt dt ad $d\tau$. Conſequenter celeritatis incrementa ſunt temporibus, quibus producuntur, proportionalia. Q. E. I.

Corollarium 1.

131. Apparet haec incrementa celeritatis non pendere ab ipſa celeritate c, ſed eundem habitura eſſe valorem, quantumuis magna aut parua ponatur c. Hocque natura potentiarum abſolutarum melius intelligitur, quod aequaliter agant in corpora mota et quiescentia.

Corollarium 2.

132. Si ergo fuerit $c = o$, punctumque A quiescens a potentia ad motum ſollicitetur, erunt ipſo motus initio celeritates acquiſitae, vt tempora: ſcilicet duplo tempore duplam, triplo triplam adipiscetur celeritatem.

Corollarium 3.

133. Si igitur ipſo motus initio celeritas tempuſculo t acquiſita, dicatur c, et ſpatium percurſum ſit s; erit $t = nc$. Sed eſt etiam $t = \int\frac{ds}{c}$ (37). Ergo prodit $nc = \int\frac{ds}{c}$, ſeu $ncdc = ds$ hincque $s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n}$. Spatia igitur primo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum, ſiue celeritatum, per ea ſpatia acquiſita.

Scho-

Scholion 1.

134. Veritas huius propoſitionis, quod celeritatis incrementa temporibus, quibus generantur, ſint proportionalia etiam in quantitatibus finitis conſtat, ſi modo potentia punctum ſollicitans manet eadem, et eandem perpetuo retinet directionem, quam habet ipſe puncti motus. In infinite paruis hac reſtrictione non eſt opus, potentia enim vtcunque variabilis per tempusculum quam minimum nullius mutationis capax eſt conſideranda. Quomodo autem ſe habeant diuerſarum potentiarum effectus mox ſumus expoſituri, atque etiam in punctis, quae a potentiis ſollicitantur diuerſitatem ponemus, vt aliud in data ratione maius minusue eſſe poſſit. Neque vero haec inaequalitas aduerſatur extremae punctorum paruitati, non enim puncta mathematica intelligimus, ſed phyſica ex quorum compoſitione corpora oriuntur. Poſſunt enim duo pluraue in vnum coaleſcere concipi, quod, quanquam ſimplicibus eſt maius, infinite tamen exiguae manet magnitudinis.

Scholion 2.

135. Theoremate hoc ex ſolutione problematis inuento primus eſt vſus Galilaeus ad motum grauium delabentium inueſtigandum. Eius quidem demonſtrationem non dedit, ſed tamen propter inſignem eius cum phaenomenis congruentiam de eo amplius dubitari noluit. Refutauit vero etiam alias hac de re opiniones, quo ſuam ſententiam non

parum confirmauit. Alii enim ſtatuebant celeritatis incrementa non temporibus, ſed ſpatiis percurſis eſſe proportionalia, huius vero abſurditas a Galilaeo iam tunc plerisque Philoſophis erat perſuaſa. Apparet autem, ſi potentiarum actiones hanc ſequerentur legem nulla corpora ad motum perduci vnquam poſſe. Foret enim $dc = nds$ et $c = ns$, tempus vero t, quod eſt $\int \frac{ds}{c}$ euaderet $= \frac{1}{n}\int \frac{dc}{c} = \frac{1}{n}lc = \frac{1}{n}lns$ conſt. quae conſtans eſſe debet $= -\frac{1}{n}lon$. Tempus ſcilicet logarithmo ſpatii deſcripti per o diuiſi eſſet proportionale et propterea infinitum. Nullum igitur corpus ex quiete vnquam ad motum poſſet perduci. Recte itaque Galilaeus aduerſariis reſpondit, quod in inſtanti motus finitus hoc poſito generari deberet, alioquin motum produci prorſus non poſſe. Etſi enim in initio infinite parua in puncto ponatur celeritas, ea tamen ab huiusmodi potentia imaginaria nunquam effici poterit finita. Ex data vero problematis ſolutione intelligitur legem inuentam neceſſariam eſſe, neque vllam aliam vi principii contradictionis exiſtere poſſe.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

136. *Potentia* q *in punctum* b *eundem habet effectum, quem potentia* p *in punctum* a; *ſi fuerit* q : p = b : a.

Demonſtratio.

Ponatur $q = np$, erit $b = na$. Concipiatur iam punctum na in n partes aequales diuiſum, quarum quae-

quaelibet erit $= a$; harum partium vnaquaeque ſollicitata ſit a parte n ſima ipſius potentiae np id eſt a potentia p. His poſitis quaeuis pars eodem modo trahetur a ſua potentia, quo punctum ipſum a a potentia p. Neque vero hae puncti na partes a ſuis potentiis ſollicitatae a ſe inuicem ſegregabunt; ſed perpetuo vnitae manebunt, ſi quidem initio fuerint coniunctae. Peſpicuum autem eſt hos duos caſus eodem redire, nec a ſe inuicem diſcrepare, ſiue punctum na a potentia np trahatur, ſiue quaeuis puncti na pars a a ſimili parte p potentiae np trahatur, dummodo partes non a ſe inuicem diuellantur. Quapropter conſtat propoſitum na aeque a potentia np vrgeri ac punctum a a potentia p. Q. E. D.

Corollarium I.

137. Punctum igitur na a potentia np easdem adipiſcetur accelerationes, quas punctum a a potentia p.

Corollarium 2.

138. Ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus eſt maiori potentia, idque tanto maiori, quanto illud punctum maius eſt quam hoc.

Scholion I.

139. Propoſitio iſta fundamentum complectitur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia ſeu maſſa in Mechanicis conſiderari debeat. Attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus

mo-

mouendumeſt conflatum, eique maſſa corporis proportionalis eſt ponenda. Puncta vero ea inter ſe aequalia cenſeri debent, non quae aeque ſunt parua, ſed in quae eadem potentia aequales exerit effectus. Si igitur vniuerſam materiam in huiusmodi aequalia puncta ſeu elementa concipiamus diuiſam, quantitatem materiae cuiusque corporis ex numero punrum ex quibus eſt compoſitum, aeſtimari neceſſe eſt. Vim autem inertiae proportionalem eſſe huic punctorum numero ſeu quantitati materiae in ſequenti propoſitione demonſtrabimus.

Corollarium 3.

140. Aequalia ergo ſunt, quod ad quantitatem materiae attinet, duo corpora, quae ex aequali punctorum numero ſunt compoſita. Atque duo corpora ſunt in ratione m ad n, ſi punctorum, ex quibus conſtant, numeri teneant rationem hanc m ad n.

Scholion 2.

141. Oſtendetur vero in ſequentibus hanc ipſam quantitatis materiae menſurandae rationem re ipſa adhiberi, et apud omnes eſſe receptam. Ex pondere enim cuiusque corporis materia ſolet inueſtigari, ponderique materiae quantitas proportionalis cenſetur. Corpora autem omnia aequaliter in ſpatio vacuo deſcendere per experimenta conſtat, et propterea omnia a vi grauitatis aequaliter accelerantur. Quo circa neceſſe eſt, vt vis grauitatis in ſingula corpora agens eorum quantitati materiae ſit

pro-

proportionalis. Pondus vero corporis indicat vim grauitatis, qua illud ſollicitatur. Quare cum illa ſit proportionalis materiae quantitati, ponderatione ſimul quantitas materiae innoteſcit, eo ipſo ſenſu, quem hic materiae tribuimus.

PROPOSITIO 17.

Theorema.

142. *Vis inertiae cuiuscunque corporis proportionalis eſt quantitati materiae, ex qua conſtat.*

Demonſtratio.

Vis inertiae eſt vis in quouis corpore inſita in ſtatu ſuo quietis vel motus aequabilis in directum permanendi (74.). Ea igitur aeſtimanda eſt ex vi, vel potentia, qua opus eſt ad corpus ex ſtatu ſuo deturbandum. Diuerſa vero corpora aequaliter in ſtatu ſuo perturbantur a potentiis, quae ſunt vt quantitates materiae in illis contentae. Eorum igitur vires inertiae proportionales ſunt his potentiis. Conſequenter etiam materiae quantitatibus ſunt proportionales. Q. E. D.

Corollarium I.

143. Perſpicitur ſimul ex demonſtratione idem corpus ſiue quiescat ſiue moueatur eandem habere ſemper vim inertiae. Nam ſiue quiescat ſiue moueatur aequaliter ab eadem potentia afficitur ſcilicet abſoluta.

Corollarium 2.

144. Neque vero vis inertiae homogenea eſt cum vlla potentia: fieri enim non poteſt, vt corpus quantumuis magnum a minima potentia non afficiatur, vt in ſequentibus demonſtrabitur.

Scholion.

145. Apparet hinc origo vocis vis inertiae, quam ſupra (76.) innuimus, ex eo, quod vis inertiae actioni potentiarum quodammodo reſiſtit. *Neutonus* quoque in Princ. Phil. Nat. Definitione III, cum vi inertiae et hac vi reſiſtendi eandem ideam coniungit, et vtramque quantitati materiae proportionalem ſtatuit.

PROPOSITIO ~~14~~ 18.

Problema.

146. *Dato effectu vnius potentiae in punctum aliquod, inuenire effectum cuiusuis alius potentiae in idem punctum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 3. Quiescat punctum in A et conſiſtat potentiae datae AB in id effectus in hoc, quod ab ea tempusculo dt per ſpatiolum Ab deducatur. Quaeritur iam per quantum ſpatium idem hoc punctum tempusculo dt ab alia potentia AC protrahatur. Ducantur lineae AB et AC, ita vt iuncta BC ſit in AC normalis, id quod ſemper fieri poteſt, ſi AC$<$AB. At ſi AC$>$AB ſolutio ex illa facile deducetur. Ex altera parte ducatur recta AD ita vt BAD ſit trian-

gu-

gulum iſosceles. Biſecentur AB et AD in E et F, et per AE repraeſentetur dimidium potentiae AB, et per AF tantadem potentia. Manifeſtum eſt potentiam AC idem praeſtare in punctum A, quod duae potentiae AE et AF coniunctim (107.) quia AC aequiualet ob parallelogrammum AECF ambabus AE et AF. Loco igitur potentiae AC ponamus punctum A ſollicitari a potentiis AE et AF. Hoc vero modo rem concipiamus, quaſi quaelibet potentia AE et AF dimidium puncti A afficiat. Medietates vero iſtae ſint ad tempusculum *dt* ſaltem a ſe inuicem ſolutae, hocque finito eas ſubito ad ſe inuicem rurſus accedere ponemus. Quia nunc potentia AB punctum A tempusculo *dt* per ſpatium A*b* protrahit, protrahet dimidia potentia AE puncti dimidium eodem tempusculo *dt* per idem ſpatium A*b* (136.). Similiter tempusculo *dt* altera medietas puncti A a potentia AF protrahetur per ſpatium A*d*=A*b*. Finito igitur tempusculo *dt*, altera medietas puncti A erit in *b* altera in *d*. Coeant nunc rurſus ſubito ad ſe mutuo, ſeu contrahantur vi cohaeſionis infinita, conuenient in puncto medio *c* lineolae *bd*: nulla enim eſt ratio, quare propius ad *b* quam *d* conueniant. A potentiis ergo AE et AF coniunctim agentibus punctum A tempusculo *dt* per ſpatiolum A*c* protrahetur. Quamobrem etiam potentia AC aequiualens potentiis AE et AF tempusculo *dt* protrahet per ſpatiolum A*c*. Eſt vero *bd* parallela ipſi BD et propterea A*b* : A*c*=AB : AC. Dato igitur ſpatiolo A*b*, per quod punctum A a po-

tentia AB protrahitur, dabitur ſpatiolum Ac, per quod idem punctum A ab alia potentia AC protrahitur eodem tempusculo. Atque ſimul patet, ſi effectus Ac minoris potentiae AC fuerit datus, quantus ſit maioris AB effectus Ab: Q. E. I.

Corollarium 1.

147. Spatia igitur, per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis protrahuntur aequalibus temporibus, ſunt vt ipſae potentiae.

Corollarium 2.

148. Quia ſpatia motus initio deſcripta inaequalibus temporibus ſunt in duplicata ratione temporum (133.); erunt ſpatia per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis inaequalibus temporibus protrahuntur in ratione compoſita ex ratione ſimplici potentiarum et duplicata temporum.

Scholion.

149. Principium, quo in huius problematis ſolutione ſumus vſi, in hoc conſiſtit, vt corpus a pluribus potentiis ſollicitatum in totidem partes concipiatur diuiſum, quarum quaelibet ab vna tantum potentia trahatur. Deinde cum ſingulae a potentiis ſuis momento temporis fuerint protractae, ſubito ad ſe mutuo compelli in vnumque congredi intelligantur, quo facto locus, in quo conuenerunt, erit is, ad quem integrum corpus ab omnibus potentiis ſimul agentibus eodem tempore fuiſſet pertractum. Veritas huius principii ex hoc poteſt perſpici, quod corporis partes elaſtris fortiſſimis coniun-

iunctae poſſint concipi, quae quanquam indeſinenter agunt, tamen per interualla cedere moxque ſe ſubito contrahere vi infinita poni poſſunt, ita vt tempus, quo partes ſolutae ad ſe inuicem reducuntur, ſit nullum. Eodem vero hoc principio iam alii in pluribus mechanicis problematibus ſoluendis ſunt vſi. Atque plerique adoptauerunt iſtud re non diuerſum, quod potentias non indeſinenter, ſed per ſaltus effectum ſuum exercere poſuerunt. Hoc autem principio admiſſo manifeſtum eſt duas partes aequales recta ad ſe mutuo accedere et interualli ſui medio congredi debere.

PROPOSITIO 19.

Theorema.

150. *Moueatur punctum in directione* AM *et ſollicitetur, dum per ſpatiolum* Mm *percurrit a potentia* p *ſecundum eandem directionem trahente, erit incrementum celeritatis, quod interea punctum acquirit vt potentia ſollicitans ducta in tempusculum, quo elementum* Mm *percurritur.* Tab. II. Fig. 4.

Demonſtratio.

Sit tempusculum dt, et abſoluat punctum hoc tempore ſpatium $M\mu$, ſi a potentia non ſollicitaretur; ſed celeritate, quam in M habuit, vniformiter progredi pergeret. Effectus vero potentiae in hoc conſiſtit, vt punctum ab ea vlterius per μm protrahatur, quod ſpatiolum aequale eſt illi, per quod idem punctum, ſi quieſceret ab eadem potentia eodem tempusculo dt protraheretur, quia potentia po-

nitur abſoluta (111.). Huic ſpatiolo dato tempore proportionale eſt celeritatis incrementum. At ſi potentia eſt eadem, celeritatis incrementum eſt vt tempusculum dt (130.). Quare cum ſpatiolum $m\mu$ ſeu incrementum celeritatis ſit dato tempusculo vt potentia p, erit celeritatis incrementum pro quocunque tempusculo et quibuscunque potentiis vt pdt, i. e. vt potentia ducta in tempusculum. Q. E. D.

Corollarium 1.

151. Sit puncti in M celeritas c, et ſpatiolum $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$, quia ad tempus determinandum, elementum Mm motu aequabili deſcribi ponendum eſt. Cum autem ſit dc vt pdt, erit quoque dc vt $\frac{pds}{c}$, ſeu cdc vt pds. Incrementum ergo quadrati celeritatis eſt vt potentia ducta in ſpatii elementum percurſum.

Corollarium 2.

152. Apparet igitur non ſolum verum eſſe hoc theorema, ſed etiam neceſſario verum, ita vt contradictionem inuolueret ponere $dc = p^2dt$ vel p^3dt aliamue functionem loco p. Quae omnes cum Clar. *Dan. Bernoullio* in Comment. Tom. I. aeque probabiles videantur, de rigidis harum propoſitionum demonſtrationibus maxime eram ſollicitus.

Scholion.

153. Propoſitionis huius demonſtratio facilius ſequitur ex 148. vnde prodit ſpatiolum $m\mu$ propor-

portionale potentiae p ductae in quadratum tempusculi dt, ita vt ſit $m\mu$ vt pdt^2. At $m\mu$ diuiſum per tempus dt dat incrementum celeritatis; quare celeritatis incrementum erit vt pdt, quemadmodum in propoſitione erat enunciatum.

PROPOSITIO 20.
Theorema.

154. *Congruente puncti directione motus cum potentiae directione, erit incrementum celeritatis, vt potentia ducta in tempusculum et diuiſa per materiam ſeu quantitatem puncti.*

Demonſtratio.

Sint duo puncta ſeu corpuscula inaequalia A et B mota in rectis AM, BN. Sollicitentur ea a potentiis p et π reſpectiue, dum percurrunt ſpatiola Mm, Nn, et ſint tempora, quibus ea percurruntur dt, $d\tau$. Manifeſtum eſt punctum B a potentia π eodem modo affici ac punctum A a potentia $\frac{A\pi}{B}$ (136.). Quare ſubſtituto loco B puncto ipſi A aequali, pro potentia π ſubſtitui debet potentia $\frac{A\pi}{B}$, hocque modo obtinemus caſum propoſitionis praecedentis, quo puncta ponuntur aequalia. Hanc ob rem incrementum celeritatis per Mm eſt ad incrementum celeritatis per Nn vt pdt ad $\frac{A\pi}{B}d\tau$, ſeu vt $\frac{pdt}{A}$ ad $\frac{\pi d\tau}{B}$ (150.). Ex quo conſtat propoſitum, quod celeritatis incrementum, ſit vt factum ex potentia et tempusculo diuiſum per puncti materiam ſeu quantitatem. Q. E. D. Tab. II. Fig. 5.

Co-

Corollarium I.

155. Si igitur celeritas puncti A fuerit c, erit $dc = \frac{npdt}{A}$, vbi n in omnibus caſibus eundem denotat numerum, neque enim a potentia neque a tempusculo neque a puncti quantitate pendet.

Corollarium 2.

156. Quantitas materiae A hic in conſiderationem venit quatenus potentiae ſollicitanti reluctatur, i. e. quatenus congruit cum vi inertiae. Hanc ob rem eſt celeritatis incrementum vt potentia ſollicitans et tempusculum directe, atque inuerſe vt vis corporis inertiae.

Corollarium 3.

157. Poſito ſpatio $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$. Hinc fiet $dc = \frac{npds}{Ac}$, ſeu $cdc = \frac{npds}{A}$. Quare incrementum quadrati celeritatis proportionale eſt facto ex potentia in ſpatiolum percurſum diuiſo per maſſam ſeu vim inertiae corpusculi.

Scholion.

157. Propoſitio iſta complectitur omnia principia hactenus tradita motus naturam definientia, omnesque leges motus, ſi quidem potentiae directio cum motus directione congruit. Quamobrem ſi haec propoſitio cum decima quarta coniungitur, qua effectus potentiarum oblique agentium determinatur, omnia habebuntur principia, ex quibus punctorum a quibuscunque potentiis ſollicitatorum motus poſſunt inueniri.

Co-

Corollarium 4.

159. Quia eſt $dc = \frac{npdt}{A}$, erit ſpatiolum per quod punctum A a potentia p tempuſculo dt perducitur $= \frac{npdt^2}{A}$. Eſt enim hoc ſpatiolum factum ex dc in dt. Nam dicto hoc ſpatiolo dz eſt $dc = \frac{dz}{dt}$ (128.), adeoque $dz = dc.dt = \frac{npdt^2}{A}$.

PROPOSITIO 21.

Problema.

160. *Potentiae cuiuscunque in punctum motum oblique agentis effectum determinare.* Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c directionemque AB. Sollicitetur vero a potentia p, cuius directio AC cum AB faciat angulum, cuius ſinus eſt k. Perſpicuum eſt punctum A ſibi relictum neque a potentia ſollicitatum in recta AB eſſe progreſſurum, tempuſculoque dt percurſurum ſpatium AB$=cdt$ (30.). Agente vero potentia p declinabit punctum A a recta AB, percurretque interea ſpatiolum AD, vt in prop. 14 eſt oſtenſum. Poſuimus autem ibi AC ſeu BD$=dz$, quod eſt ſpatiolum per quod punctum A, ſi quiesceret, a potentia p tempore dt pertraheretur. Eſt ergo $dz = \frac{npdt^2}{A}$ (159.). Anguli igitur BAD ſinus, qui inuentus eſt $= \frac{kdz}{cdt}$ (124.) erit $= \frac{nkpdt}{Ac}$. Atque celeritatis incrementum dc, quod erat $= \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$ (123), fit $= \frac{npdt\sqrt{(1-kk)}}{A}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

161. Vocetur ſpatium AD$=ds$, erit $dt=\frac{ds}{c}$ adeoque poſito $\frac{ds}{c}$ loco dt, prodibit $dc=\frac{npds\sqrt{(1-kk)}}{Ac}$.
Tab. II. Fig. 6. Ducatur ex D in directionem potentiae AE perpendicularis DE, ſitque AF$=dy$, et DF$=dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, et $k=\frac{dx}{ds}$, et $\sqrt{(1-kk)}=\frac{dy}{ds}$. Proueniet ergo $dc=\frac{npdy}{Ac}$ ſeu $Acdc=npdy$.

Corollarium 2.

162. Ducatur ad curuam, quam corpusculum hoc modo deſcribit, in A radius osculi AO, erit $Bb:AB=AD:AO$. Quare erit $AO=\frac{AB.AD}{Bb}$. Eſt vero $\frac{Bb}{AB}$ ſinus anguli BAD, qui inuentus eſt $=\frac{nkpdt}{Ac}$. Erit ergo $\frac{Bb}{AB}=\frac{npdxdt}{Acds}$, atque ob AD$=ds$, prodibit $AO=\frac{Acds^2}{npdxdt}$.

Corollarium 3.

163. Quia vero eſt $dt=\frac{ds}{c}$, erit $AO=\frac{Ac^2ds}{npdx}$. Vocetur radius osculi AO$=r$, habebitur $nprdx= Ac^2 ds$.

Corollarium 4.

164. Si potentiae p directio AE incidat in normalem AO, fiet AF$=dy=o$, et DF$=dx=$AD$=ds$. Quamobrem erit $cdc=o$, atque idcirco haec potentia celeritatem non immutabit.

Corollarium 5.

165. Hoc porro caſu erit $npr=Ac^2$ ob $dx=ds$, atque ideo $r=\frac{Ac^2}{np}$. Haec igitur potentia, cuius di-

directio eſt normalis in corporis directionem efficit, vt corpus non in recta motum ſuum abſoluat, ſed in arcu curuae.

Corollarium 6.

166. Si potentiae p directio incidat in tangentem AB; fiet $dx = o$ et $dy = ds$. Habebitur ergo $Acdc = npds$. In hac igitur directione potentia p celeritatem corporis maxime augebit.

Corollarium 7.

167. Si potentiae p directio in oppoſitam ipſi AB directionem incidat, ita vt motui corporis ſit contraria; fiet p quantitas negatiua, habebiturque $Acdc = -npds$. Tantum igitur hoc caſu minuetur celeritas, quantum ante augebatur.

Corollarium 8.

168. In vtroque autem caſu, quo directio potentiae p in tangentem incidit, erit $r = \frac{Ac^2\, ds}{np.o}$ ob $dx = o$. Tum igitur directio corporis non mutabitur, ſed id in recta moueri perget.

Corollarium 9.

169. Determinato ergo in vnico caſu ex experimento valore litterae n, inſeruiet is pro omnibus caſibus. Tum igitur omnium, quae in motibus poſſunt deſiderari, poterunt aſſignari valores abſoluti.

Corollarium 10.

170. Ex corollario primo prodit $A = \frac{npdy}{cdc}$. Quo valore in tertio ſubſtituto habebitur $nprdx$

$=\frac{npcdyds}{dc}$, ſeu $rdxdc=cdyds$. In qua aequatione neque n neque A neque p ineſt, haec igitur valet pro motu puncti cuiuscunque a quacunque potentia ſollicitati.

Corollarium II.

171. Quanquam autem in iſta aequatione ipſa potentia p non ineſt, tamen eius directio a qua relatio elementorum dx et dy pendet, adhuc ſuper eſt. Data igitur directione potentiae punctum in quouis loco ſollicitantis, et ipſa curua in qua punctum mouetur, poterit ex his ſolis datis determinari puncti celeritas in quouis loco. Erit enim $\frac{dc}{c}=\frac{dyds}{rdx}$ ſeu $c=e^{\int\frac{dyds}{rdx}}$ vbi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1.

Corollarium 12.

172. Quia porro eſt $dt=\frac{ds}{c}$, erit $t=\int e^{-\int\frac{dyds}{rdx}}ds$. Hinc igitur ſimul innoteſcit tempus, quo quaeuis curuae portio deſcribitur, neque ad hoc pluribus opus eſt datis, quam ipſa curua, et directione potentiae.

Corollarium 13.

173. Si ex O in potentiae directionem AE demittatur perpendicularis OE, quae a quibusdam coradius appellatur, erit $ds:dx=AO:AE$. Poſito ergo coradio $AE=q$, erit $\frac{rdx}{ds}=q$. Fiet igitur $c=e^{\int\frac{dy}{q}}$, et $t=\int e^{-\int\frac{dy}{q}}ds$.

Scho-

Scholion.

174. Ex ſolutione huius problematis apparet, poſſe eius beneficio puncti a quibuscunque potentiis ſollicitati motum determinari. Ex duabus enim aequationibus, definitur et puncti celeritas in loco quouis, et curuatura ſeu radius osculi ipſius curuae percurſae. His vero cognitis ſimul reperietur tempus, quo quaeuis curuae portio abſoluitur, quae abunde ſufficiunt ad motum determinandum.

DEFINITIO 14.

175. Vis reſtituens eſt vis illa imaginaria et infinita, quae partes corporis ſeparatas momento rurſus congregat, et in ſtatum priſtinum reſtituit. *Huiusmodi vim in ſolutione Prop.* 18. *adeſſe concepimus, qua duae puncti partes, quae ad momentum ſolutae concipiebam, rurſus contrahebantur.*

Corollarium 1.

176. Si punctum in duas partes aequales concipiatur diuiſum, eaeque a potentiis fuerint ſeparatae, vis reſtituens eas contrahet in medio rectae illas iungentis, vt §. 146 ex principio ſufficientis rationis eſt oſtenſum.

Corollarium 2.

177. Quia effectus vis reſtituentis in inſtanti debet produci, poterit vis reſtituens conſiderari vt elaſtrum vi infinita praeditum, quo partes ſeparatae iterum coniunguntur.

Scholion.

178. Vſus huius vis reſtituentis iam elucet quodammodo ex propoſitione 18, vſus vero eius adhuc erit ampliſſimus in ſequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis ſumus inueſtigaturi. Hic vero effectum eius indagabimus in coniungendis pluribus puncti partibus ſeparatis, quae inquiſitio in ſequentibus magnam habebit vtilitatem. Complectitur ergo vis reſtituens principium aliquod, cuius ope plurimae quaeſtiones facile reſolui poterunt, idque principium reſtitutionis vocabimus.

PROPOSITIO 22.

Theorema.

Tab. I. Fig. 7. 179. *Sint duae puncti partes in* b *et* d *ſeparatae, dico eas a vi reſtituente coniunctum iri in puncto* c *centro grauitatis particularum* b *et* d.

Demonſtratio.

Fuerint hae partes primo coniunctae in A, ſintque eae a potentiis AB, AD pertractae in *b* et *d* eodem tempuſculo *dt*. Harum potentiarum vero aequiualens fit potentia AC, quae eodem tempuſculo integrum punctum ex A pertrahere valeat in *c*. Manifeſtum igitur eſt partes *b* et *d* a vi reſiſtente in *c* contrahi debere, quia potentia AC eundem in punctum integrum A edit effectum, ac ambae AB et AD in duas eius partes (149). Hinc igitur innoteſcit punctum concurſus *c*, in quod particulae *b* et *d* a vi reſtituente compellentur. Quo autem particula

cula b a potentia AB tempuſculo dt per ſpatiolum AB protrahatur debet eſſe $Ab = \frac{n.AB.dt^2}{b}$ (159.) ſeu $AB = \frac{Ab.b}{ndt^2}$. Similem ob rationem erit $AD = \frac{Ad.d}{ndt^2}$, et $AC = \frac{Ac(b+d)}{ndt^2}$. Eſt vero AC diagonalis parallelogrammi, quod a potentiis AB et AD conſtituitur, quia his aequiualet. Ex illis autem aequationibus deducitur $\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}$, ſunt vero AB, AD et AC inter ſe vt ſinus angulorum DAC, BAC et BAD. Quamobrem erit $\frac{\text{ſ}DAC}{Ab} + \frac{\text{ſ}BAC}{Ad} = \frac{\text{ſ}BAD}{Ac}$, ex qua proprietate ſequitur puncta b, c, et d eſſe in directum poſita. Hoc cum ſit, erit $bc : cd = \text{ſ}BAC.\,Ab : \text{ſ}DAC.\,Ad = AD.\,Ab : AB.\,Ad$. At eſt $AD : AB = Ad.\,d : Ab.\,b$. Conſequenter prodibit $bc : cd = d : b$ ſeu $b.\,bc = d.\,dc$. Ex quo intelligitur punctum c eſſe centrum grauitatis particularum *b et d*. Q. E. D.

Corollarium I.

180. Vbicunque ergo accipiatur punctum A, ſemper in eundem incidit locum punctum concurſus c, ex quo apparet vim reſtituentem conſtantem habere effectum, neque a loco puncti A nec a potentiis particulas b et d ſollicitantibus pendere.

Scholion.

181. Egregie conuenit hic vis reſtituentis effectus cum effectu vis elaſticae, quam eius loco ſubſtituere licet. Iungat enim particulas b et d filum elaſticum bd, quod ſeſe contrahendo b et d congreget in c. Vis autem haec contrahens aequaliter aget in

in particulas *b* et *d*, cum vtrinque ſe aequaliter contrahere conetur. Spatia vero, per quae *b* et *d* eodem tempore protrahuntur, ſunt reciproce vt ipſae particulae (159), quia ab eadem potentia afficiuntur. Quare ſi punctum concurſus eſt *c*, erit *bc* ad *dc* reciproce vt *b* ad *d*, ſeu $b.bc = d.cd$. Ex quo etiam intelligitur punctum *c* eſſe centrum grauitatis particularum *b* et *d*.

Corollarium 2.

182. Quamuis igitur vis reſtituens ſit imaginaria et in ſola cogitatione formata, tamen eius effectus ſequitur motus leges reales. Hocque magis erimus certi, ope principii reſtitutionis ſemper ad veritatem perueniri.

PROPOSITIO 23.

Theorema.

Tab. II. Fig. 8. 183. *Sint* a, b, c, d *partes puncti a ſe inuicem ſeparatae, quae a vi reſtituente rurſus congregentur: conuenient eae in communi centro grauitatis* g.

Demonſtratio.

Ponamus initio integrum punctum fuiſſe in puncto quocunque O, ex quo ſingulae hae partes *a*, *b*, *c*, *d* tempuſculo *dt* a potentiis OA, OB, OC, OD pertractae ſint in *a*, *b*, *c*, *d*. Accipiatur harum potentiarum aequiualens AG, quae eodem tempuſculo integrum punctum, quod eſt $a+b+c+d$, ex O pertraxiſſet in *g*; erit g punctum, in quod partes *a*, *b*, *c*, *d* a vi reſtituente congregabuntur (149).

Per

Per punctum O ducatur recta quaeuis KN, in eamque ex punctis A, a, B, b, C, c, D, d, G, g, demittantur perpendicula. Erunt autem $OA=\frac{Oa.a}{ndt^2}$, $OB=\frac{Ob.b}{ndt^2}$, $OC=\frac{Oc.c}{ndt^2}$, $OD=\frac{Od.d}{ndt^2}$, et $OG=\frac{Og(a+b+c+d)}{ndt^2}$ (159). At ob triangula ſimilia OAK, Oak; OBL, Obl; etc. erit $AK=\frac{OA.ak}{Oa}=\frac{ak.a}{ndt^2}$, $BL=\frac{OB.bl}{Ob}=\frac{bl.b}{ndt^2}$, $CM=\frac{OC.cm}{Oc}=\frac{cm.c}{ndt^2}$, $DN=\frac{OC.dn}{Od}=\frac{dn.d}{ndt^2}$, et $GS=\frac{OG.gs}{Og}=\frac{gs(a+b+c+d)}{ndt^2}$: atque $OK=\frac{OA.Ok}{Oa}=\frac{Ok.a}{ndt^2}$, $OL=\frac{OB.Ol}{Ob}=\frac{Ol.b}{ndt^2}$, $OM=\frac{OC.Om}{Oc}=\frac{Om.c}{ndt^2}$, $ON=\frac{OD.On}{Od}=\frac{On.d}{ndt^2}$ et $OS=\frac{OG.Os}{Og}=\frac{Os(a+b+c+d)}{ndt^2}$. Sed quoniam AG eſt potentia aequiualens potentiis OA, OB, OC, OD conſtat ex ſtatica eſſe AK+BL+CM+DN=GS, et OK+OL−OM−ON=OS. Fiet ergo $ak.a+bl.b+cm.c+dn.d=gs(a+b+c+d)$, et $Ok.a+Ol.b-Om.c-On.d=Os(a+b+c+d)$. Ex quibus proprietatibus intelligitur punctum g eſſe centrum grauitatis particularum a, b, c, d. Vis ergo reſtituens has particulas in centro communi grauitatis g congregat. Q. E. D.

Corollarium I.

184. In hoc igitur vis reſtituentis effectus conſiſtit, quod corpusculi quotcunque partes ſeparatas in ipſarum communi centro grauitatis congreget.

Corollarium 2.

185. Hoc igitur modo puncti a pluribus potentiis ſollicitati motus poterit determinari ſine potentiae aequiualentis conſideratione, dum a ſingulis potentiis partes quaecunque affici ponuntur, quolibetque tempuſculo iterum a vi reſtituente congregari.

Scholion.

Tab. II. Fig. 9. 186. Demonſtratio huius theorematis ope filorum elaſticorum ſeſe contrahentium eodem modo poteſt perfici, quo ante fecimus (181.). Sint enim particulae ſeparatae in *a*, *b*, *c*, *d*, et ponamus primo filum particulas *a* et *b* tantum contrahere, coibunt eae in centrum grauitatis *e*. Nunc concipiamus particulas *a* et *b* in *e* locatas cum particula *c* coniungi erit punctum concurſus in *f*, quod eſt centrum grauitatis trium particularum *a*, *b* et *c*. Iam hae tres in *f* poſitae cum quarta *d* coniungantur, erit punctum concurſus in *g* centro grauitatis omnium quatuor *a*, *b*, *c* et *d*. Quare a vi reſtituente omnes particulae in commune centrum grauitatis congregantur.

Corollarium 3.

187. Denuo igitur conſtat, vim reſtituentem recte per contractionem filorum elaſticorum binas quasque particulas iungentium repraeſentari.

SCHO-

SCHOLION GENERALE.

188. His igitur poſitis principiis, ex quibus puncti liberi a quibuscunque potentiis ſollicitati motus determinari poterit, progrediemur ad punctorum liberorum motus inueſtigandos. Hanc vero tractationem in duas partes dispesci conueniet, in quarum prima motus tantum rectilinei examinabuntur in altera vero curuilinei quicunque. Illi rectilinei, vt ex dictis intelligitur, oriuntur, quando motus directio cum potentiae directione conuenit; hi vero quando hae directiones discrepant. Vtramque vero partem duplici modo tractabimus, pro duplici potentiarum natura: primum ſcilicet puncta a ſolis potentiis abſolutis ſollicitari ponemus; deinde vero ab abſolutis et relatiuis coniunctim. Loco relatiuarum quidem ſubſtituemus media reſiſtentia, quia vt iam monuimus potentiae relatiuae ad motus corporum in fluidis determinandos conſiderantur (116.), quamobrem eos potiſſimum caſus, qui in rerum natura exiſtunt, euoluemus, neque multum iis, qui non niſi in imaginatione repeririuntur, immorabimur. Primum ergo de motu rectilineo puncti liberi a potentiis abſolutis ſollicitati tractabimus. Deinde inueſtigabimus motus rectilineos puncti liberi in medio reſiſtente. Tertio motus curuilineos puncti liberi a potentiis abſolutis vtcunque ſollicitati euoluemus. Quarto denique motus curuilineos puncti liberi in medio reſiſtente exponemus.

CAPUT TERTIUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

PROPOSITIO 24.
Theorema.

189.

Quando potentiae et motus directiones in eadem ſitae ſunt recta, motus erit rectilineus.

Demonſtratio.

Omne corpus vi inſita conatur motum ſuum in directum continuare, id quod ſemper praeſtat, niſi impediatur (65). Potentiae vero in corpus motum duplicem eſſe oſtendimus effectum, alterum quo eius directio immutatur, alterum quo celeritas eius. At diratio manet immutata, ſi potentiae directio cum ea in directum iacet (128.). Hoc igitur caſu punctum in linea recta progredi perget. Q. E. D.

Corollarium I.

190. In hoc igitur capite alios non conſiderabimus caſus, niſi in quibus motus et potentiae directiones in eadem recta ſunt poſitae.

Corollarium 2.

191. Vidimus autem duobus modis hanc congruentiam euenire poſſe, prout ſcilicet ambae hae di-

directiones vel in eandem plagam vel in oppoſitas tendunt. In quorum illo puncti celeritas augetur, in hoc vero diminuitur (128.).

Scholion.

192. In motu hoc rectilineo duo ſunt conſideranda, quorum primum eſt potentia, a qua punctum vbiuis ſollicitatur, alterum vero celeritas, quam habet in quolibet ſpatii loco. His praeterea adiungimus tertium, quod eſt tempus, quo quaeuis ſpatii portio percurritur. Tria vero iſta ita ſunt comparata, vt dato vno reliqua duo ſemper poſſint determinari. Primo igitur potentiam tanquam datam conſiderabimus: deinde vero eam ex data vel celeritatum vel temporum ratione inueſtigabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

193. *Protrahatur punctum in* A *quieſcens in recta* AP, *a potentia vniformi ſeu quae vbique punctum eadem vi ſollicitat, determinare celeritatem puncti in quouis loco* P. Tab. II. Fig. 10.

Solutio.

Exponatur maſſa ſeu vis inertiae puncti litera A et potentia litera g, quae erit conſtans ſeu vbique eiusdem quantitatis. Sit ſpatium AP $= x$, et celeritas in P, quae quaeritur, ponatur $= c$. Sumatur elementum ſpatii Pp, quod erit $= dx$; atque incrementum celeritatis, quod punctum, dum elementum Pp abſoluitur, a potentia g accepit, erit dc.

His poſitis erit $cdc = \frac{ngdx}{A}$ (157.), quia potentiam perpetuo deorſum trahere, et propterea motum accelerare ponimus. Ex hac aequatione, ſi integretur, oritur $cc = \frac{2ngx}{A} + \text{Conſt.}$; quae conſtans ex eo debet determinari, quod celeritas in A euaneſcat. Factis igitur $c = 0$, et $x = 0$, prodibit Conſt. $= 0$, quamobrem habebitur $cc = \frac{2ngx}{A}$, ſeu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

194. Punctum A igitur perpetuo in recta AP deſcendet, et celeritas in quouis loco erit vt radix quadrata ex ſpatio iam percurſo.

Corollarium 2.

195. Ex his etiam plurium punctorum a potentiis vniformibus ſeu conſtantibus deſcenſus poterunt comparari, erunt enim celeritates in ratione ſubduplicata compoſita ex directis potentiarum et ſpatiorum percurſorum et inuerſa maſſarum.

Scholion 1.

196. Caſus hic apprime conuenit cum lapſu corporum ſuper terra: grauitas enim, quae potentiae vices ſuſtinet, eſt vniformis in non nimis magnis a terrae ſuperficie diſtantiis. Namque idem pondus cuiusuis corporis reperitur in altiſſimis montibus et profundiſſimis vallibus; ex pondere autem grauitas innoteſcit. In deſcenſu igitur grauium libero celeritates ſunt vt radices quadratae ex altitudinibus percurſis. Haecque eſt ipſa Galilaei propoſi-

ſitio, quam primus tum ex experimentis tum ex ratione detexit. Deſcenſus autem in ſpatio ab aere vacuo fieri debet, quia aer motui reſiſtit, hancque regulam euertit.

Scholion 2.

197. In ſpatio ab aere vacuo, quod ope antliae pneumaticae efficitur, plurimis experimentis eſt demonſtratum, corpora quaecunque aequaliter deſcendere. Ex quo conſequitur, ſi nullus eſſet aer, omnia corpora ex aequalibus altitudinibus delapſa aequales adipiſci celeritates. Hanc ob rem ſi g deſignet vim grauitatis, qua quoduis corpus A cietur, erit $\frac{g}{A}$ quantitas ſemper conſtans. Vis igitur grauitatis proportionalis eſt quantitati materiae corporis, in quod agit. Illa autem vis nil aliud eſt niſi pondus corporis; quare pondera corporum ſunt quantitati materiae proportionalia. *Neutonus* hanc propoſitionem in Princ. Phil. quoque affirmat, eamque praeterea ex experimentis pendulorum probat.

Corollarium 3.

198. Corpus igitur quodcunque in ſuperficie terrae ex data altitudine delapſum datum acquiret celeritatis gradum. Cognita ergo altitudine ex qua corpus deſcendit, innoteſcet ſimul celeritas eius hoc deſcenſu acquiſita.

Scholion 3.

199. Ad celeritates igitur menſurandas poterimus has altitudines adhibere, ex quibus graue in

in terrae ſuperficie deſcendens aequalem acquirit celeritatem. Haec quidem altitudo non poteſt loco ipſius celeritatis ſubſtitui, quia celeritates ſunt in altitudinum ratione ſubduplicata. Verum tamen altitudine commode quadratum celeritatis denotari poterit.

DEINITIO 15.

200. Altitudinem celeritati cuidam debitam vocabimus poſthac eam altitudinem, ex qua graue in ſuperficie terrae deſcendens eandem illam acquirit celeritatem.

Corollarium 1.

201. Haec igitur altitudo debita eſt vt quadratum celeritatis ad quam refertur. Celeritate ergo exiſtente c et ipſi debita altitudine v, erit v vt c^2.

Scholion 1.

202. Hactenus celeritatem expreſſimus linea recta, quae dato tempore ea celeritate percurri poteſt. In poſterum autem commodius erit altitudinem debitam eius loco introducere. Hanc ob rem ponemus $v = cc$ et $c = \sqrt{v}$. Habebimus ergo in problemate praecedente hanc aequationem $v = \frac{2ngx}{A}$.

Corollarium 2.

203. In poſterum igitur ſemper loco celeritatis c ponere licebit $\sqrt{v}$, ſeu radicem quadratam ex altitudine celeritati debita.

Co-

Corollarium 3.

204. Si potentia g denotet ipſam vim grauitatis, erit x ipſa altitudo celeritati c debita, adeoque $v = x$. Eſt vero $v = \frac{2ngx}{A}$, ex quo igitur erit $n = \frac{A}{2g}$. Hoc igitur iam aſſecuti ſumus commodum, vt literam n determinauerimus, quae in omnibus caſibus tenet eundem valorem (155.).

Scholion 2.

205. Quia hic g vim grauitatis ſignificat erit $\frac{g}{A}$ quantitas conſtans (197.). Hanc ergo ponemus 1, id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit in aliis caſibus valorem ipſius $\frac{g}{A}$ ſeu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{g}{A}$ ad 1, ſeu $g : A$ vt vis g, qua corpus A ſollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in noſtris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit, ſed ipſum corporis A pondus, ſi ſuper terra eſſet poſitum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis menſurandis ingentem lucem foenerabitur.

Corollarium 4.

206. Cum in $n = \frac{A}{2g}$, g denotet vim grauitatis, poſitumque ſit $\frac{g}{A} = 1$, erit $n = \frac{1}{2}$. Quem valorem ſemper retinebit, ſi modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipſis debitarum exprimantur. Ideoque erit in noſtro caſu $dv = \frac{gdx}{A}$ et $v = \frac{gx}{a}$.

 Co-

Corollarium 5.

207. Propterea in hac lege generali $cdc = \frac{npds}{A}$ (157.), ſi ſit altitudo celeritati c debita v, erit $cdc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{pds}{A}$, vbi gp eſt ad A, vt vis p ad pondus corporis A.

Corollarium 6.

208. Simili modo, quae in §. §. 161, et 163 tradita ſunt, nempe aequationes $Acdc = npdy$ et $nprdx = Ac^2ds$, ſubſtituendo v loco c^2 et $\frac{1}{2}$ loco n, transmutantur in has $Adv = pdy$ et $prdx = 2Avds$, vbi p ad A habet rationem modo dictam.

Corollarium 7.

209. Atque in §. 165. habebitur $r = \frac{2Av}{p}$ ſeu $pr = 2Av$. Item in §. 166. habebitur $Adv = pds$, et in caſu §. 167. habebitur $Adv = -pds$. Hocque modo ante vſitatas quantitates vagas n et c ad determinatos valores reduximus.

PROPOSITIO 26.

Theorema.

210. *In diuerſis potentiarum vniformium hypotheſibus altitudines, ex quibus aequalia corpuscula deſcendentia aequales acquirunt celeritates, ſunt reciproce vt potentiae.*

Demonſtratio.

Sit vniuscuiusque corpusculi maſſa, ſeu pondus in ſuperficie terrae A, potentia quaevis vniformis g, et altitudo celeritati acquiſitae debita v. Altitu-

tudo vero, ex qua corpuſculum A a potentia g ſollicitatum aequalem acquirit deſcendendo celeritatem, ſit x, erit $v = \frac{2ngx}{A}$ (202.). At eſt $n = \frac{1}{2}$ (206.). Ergo fit $v = \frac{gx}{A}$ ſeu $Av = gx$. Quare cum celeritates a diuerſis potentiis productae et corpuſcula ponantur aequalia, erit Av quantitas conſtans, ideoque etiam gx. Propterea erit x reciproce vt g, i. e. altitudo, ex qua corpuſculum A a potentia g ſollicitatum acquirit celeritatem $\sqrt{v}$, erit reciproce vt potentia g. Q. E. D.

Corollarium 1.

211. Oſtendit *Neutonus* eiusdem corporis in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae poſiti niſum ſeu potentiam, qua ad eorum centra ſollicitatur eſſe vt 10000, 835, 525, et 410. Altitudines igitur, ex quibus corpus in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae deſcendens aequales acquirit celeritates ſunt inter ſe vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$.

Corollarium 2.

212. Statuit autem idem *Neutonus* omnia corpora in his ſuperficiebus aequaliter deſcendere, pariter vt in ſuperficie terrae. Non igitur opus eſt hanc adiicere conditionem, quod corpora ſint aequalia, ſed ex altitudinibus, quae ſunt vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$, in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et Terrae, quaecunque corpora delabentia eundem acquirunt celeritatis gradum.

 Scho-

Scholion 1.

213. Intelligitur ex his duplicem cuiusuis potentiae eſſe effectum in corpora, alterum quo certum niſum ſeu conatum corporibus imprimit, alterum quo ea reipſa mouet. Ille in ſtatica potiſſimum conſideratur, et menſurandus eſt pondere, quod aequalem habet conatum deorſum, poteritque vocari vis potentiae abſoluta. Poſterior vero effectus menſurari debet acceleratione, ſeu celeritatis incremento, quod corpori dato tempore imprimit: proportionalis igitur eſt illi conatui diuiſo per corporis maſſam (159.). Vocatur hic effectus a *Neutono* vis accelerans, et propterea vis potentiae accelerans proportionalis eſt vi eius abſolutae ad maſſam corporis ſeu pondus applicatae. Quapropter cum ſit $dv = \frac{pdx}{A}$ (207) et $\frac{p}{A}$ denotet vim accelerantem, erit dv aequale facto ex vi accelerante in elementum ſpatii percurſi. Ita vis grauitatis abſoluta eſt maſſae corporum, in quae agit, proportionalis, niſum enim eorum deorſum cauſatur, ſeu pondus, quod maſſae proportionale eſſe oſtendimus. Vis autem accelerans grauitatis in omnibus corporibus eſt aequalis, cum omnia aequaliter deſcendant, aequalibusque temporibus aequales adipiſcantur celeritates.

Corollarium 3.

214. Vires ergo potentiarum acceleratrices ſunt inter ſe vt vires abſolutae, ſi corpora ſint aequalia. Quare cum vis acceleratrix grauitatis ſit

1 vt

1 vt ante poſuimus (205), erit vis acceleratrix grauitatis ſolaris $=24, 390$; vis acceleratrix grauitatis in ſuperficie Iouis $=2, 036$; Vis acceleratrix grauitatis, quae eſt in ſuperficie Saturni $=1, 280$. Atque grauitatis vim acceleratricem in ſuperficie lunae ſtatuit *Neutonus* $=\frac{1}{3}$.

Corollarium 4.

215. Quare ſi Propoſitio 25. ad lapſum corporum in ſuperficie terrae accommodari debeat, erit $\frac{g}{A}=1$, quemadmodum fecimus §. 205. Sin vero ad lapſum corporum in ſuperficie ſolis, erit $\frac{g}{A}=24, 390$; ſin ad lapſum corporum in ſuperficie Iouis, erit $\frac{g}{A}=2, 036$; ſin ad lapſum corporum in ſuperficie Saturni, erit $\frac{g}{A}=1, 280$, ſin denique ad lapſum corporum in ſuperficie Lunae erit $\frac{g}{A}=\frac{1}{3}$.

Scholion 2.

216. Aſſumimus hic cum *Neutono* omnia corpora coeleſtia terrae noſtrae eſſe ſimilia, atque corpora in eorum ſuperficiebus poſita vim habere ad eorum centra tendentem, quae ſimilis ſit grauitati corporum terreſtrium. Ex traditis igitur *Neutonianis* apparet, corpus, cuius hic pondus ſit 1 librae, in ſuperficie Solis poſitum ponderare 24, 39 libras; in ſuperficie Iouis vero 2, 036 libras; in ſuperficie Saturni 1, 280 libras, et in ſuperficie lunae tertiam librae partem.

Scholion 3.

Quo autem facilius grauitatis ſimiliumque potentiarum in corporibus coeleſtibus natura perſpiciatur, ſingula corporum elementa aequalia aequaliter a grauitate affici concipienda ſunt. Ex quo ſequitur, quod iam experientia conſtat, vires grauitatis, quibus quaeque corpora ſollicitantur, eſſe ipſorum maſſis ſeu quantitatibus materiae proportionales. Ante vero iam eſt demonſtratum, ſi potentiae ſint maſſis corporum, quae ſollicitant, proportionales, effectus earum in corporibus mouendis eſſe aequales (136). Quamobrem ex his manifeſtum eſt omnia corpora in ſuperficie terrae aequaliter deſcendere debere, atque etiam pariter in omnibus corporibus coeleſtibus.

PROPOSITIO 27.

Problema.

Tab. II. Fig. 10. 118. *Puncto* A *a potentia vniformi per ſpatium* AP *promoto, definire tempus, quo ſpatium* AP *abſoluitur.*

Solutio.

Sit vt ante potentia ſollicitans g, ſpatium $AP = x$, et altitudo celeritati, quam in P habet debita v; erit ob $n = \frac{1}{2}$, $v = \frac{gx}{A}$. Ipſa igitur celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{gx}{A}}$. Habebitur ergo tempus, quo elementum $Pp = dx$, percurritur, vt $\frac{dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}$. Sit tempus, quo ſpatium AP abſoluitur $= t$, ponaturque $dt = \frac{n\,dx\sqrt{A}}{\sqrt{g.x}}$ oportebit ex vnico experimento determinare li-

literam m, quo tempus in data menſura puta in minutis ſecundis reperiatur. Ex illa vero aequatione prodit integrando $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$, ad quod conſtantem quantitatem adiicere non eſt opus, quia poſito $x = 0$ etiam t euaneſcit, prout debet. Determinato igitur m ex experimento, habebitur $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. ſec. Quo autem huiusmodi menſura temporis abſoluta reſultet, oportet vt x quoque ſecundum conſtantem menſuram exhibeatur: determinabimus igitur ſemper ſpatium x in ſcrupulis i. e. partibus milleſimis pedis Rhenani; fractio enim $\frac{A}{g}$ in numeris abſolutis exprimetur, ita vt non opus ſit ad eam certam menſuram adhibere. Definita ergo litera m, id quod mox faciemus, habebitur plena problematis ſolutio. Q. E. I.

Corollarium 1.

219. Si g deſignet grauitatem, erit $\frac{A}{g} = 1$, (205), hanc ob rem tempus, quo corpus terreſtre ex altitudine x ſcrup. pedis rhenani delabitur, erit $2m\sqrt{x}$ minutorum ſecundorum.

Corollarium 2.

220. Experimentis autem compertum eſt corpus minuto ſecundo altitudinem 15625 ſcrup. pedis Rhenani deſcendendo abſoluere. Quam ob rem, ſi ponatur $x = 15625$, debet prodire $t = 1$. Cum autem ſit $t = 2m\sqrt{x}$, erit $1 = 2m\sqrt{15625}$ i. e. $= 250m$. Reperitur ergo valor literae $m = \frac{1}{250}$.

Co-

Corollarium 3.

221. Quoniam vero litera m in omnibus caſibus eundem retinet valorem, erit in caſu problematis $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. ſec. Expreſſo igitur ſpatio percurſo x in ſcrupulis pedis Rhenani dabit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ numerum minutorum ſecundorum, quibus hoc ſpatium percurritur.

Corollarium 4.

222. Atque ad omnes prorſus caſus hic valor ipſius m inuentus accommodari poteſt. Sit enim elementum ſpatii deſcripti dt, altitudo celeritati, qua hoc percurritur, debita v, erit temporis elementum $dt = \frac{mds}{\sqrt{v}}$ et $t = m\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Ex qua aequatione, ſi v et s in ſcrup. pedis Rhenani exprimantur et ponatur $m = \frac{1}{250}$, prodibit tempus t in minutis ſecundis, $t = \frac{1}{250}\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ min. ſec.

Scholion 1.

223. Ex hoc igitur, quod celeritates per radices quadratas altitudinum debitarum denotamus, iſtud porro aſſecuti ſumus commodum, quod temporum abſolutam menſuram ſemper inueniamus. Vſi vero ſumus experimento, quo definitur altitudo, ex qua graue minuto ſecundo delabitur, quam *Hugenius* per experimenta pendulorum inuenit 15 ped. Paris. 1 dig. 2 $\frac{1}{18}$ lineas, i. e. in fractionibus decimalibus 15, 0976 ped. Pariſinos. Rationem autem pedis Rhenani ad Pariſinum adhibemus 1000 ad 1035, ex qua altitudo minuto ſecundo cadendo per-

percurſa prouenit 15, 625 ped. Rhenanos, ſeu 15625 ſcrupula eiusdem pedis; Hancque menſuram malumus adhibere quam Pariſinam, quia hic numerus eſt quadratus, eoque euitamus frequentes radicis extractiones. Numerus praeterea, per quem $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ (s et v in ſcrupulis pedis Rhenani expreſſis) diuidi debet, vt tempus in minutis ſec. reperiatur, eſt 250, qui facillime memoria teneri poteſt.

Corollarium 5.

224. Cum $\frac{g}{A}$ denotet potentiae vim accelerantem (213) erunt tempora, quibus ſpatia quaecunque a potentiis vniformibus percurruntur, in ratione ſubduplicata compoſita ex directa ſpatiorum et reciproca virium accelerantium.

Corollarium 6.

225. Poſita celeritate, quam punctum A ex altitudine x a potentia g ſollicitatum acquirit, c, eſt c vt $\sqrt{\frac{gx}{A}}$ (193). Ergo ct erit vt x, quia t eſt vt $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. Conſequenter ſpatia percurſa ſunt in ratione compoſita temporum quibus deſcribuntur, et celeritatum, quas deſcenſu adipiscuntur, quaecunque ſint potentiae ſollicitantes, modo ſint vniformes.

Corollarium 7.

226. Atque ſpatia, quae aequalibus temporibus percurruntur, ſunt vt vires potentiarum ſollicitantium accelerantes.

Corollarium 8.

227. Spatia igitur, per quae corpora aequalibus temporibus in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni, Lunae et Terrae delabuntur, ſunt inter ſe vt 24390, 2036, 1280, 333, 1000 (214).

Corollarium 9.

228. In eadem vis accelerantis hypotheſi tempora, quibus ſpatia quaecunque percurruntur, ſunt vt celeritates acquiſitae, atque tam tempora quam celeritates ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum deſcriptorum.

Scholion 2.

229. Hic ſemper ponimus corpora deſcendentia deſcenſum a quiete inchoare, ſeu eorum celeritatem in initio deſcenſus eſſe nullam. In ſequentibus vero inueſtigabimus eos motus, qui oriuntur, quando corpora in ipſo motus initio iam habent quandam celeritatem. In his autem tempora et ſpatia ea debent intelligi, quae initium ſuum habent in ipſo celeritatis euaneſcentis puncto, et aequationes inuentae omnes ita ſunt comparatae, vt euaneſcente c vel v, ſimul x et t euaneſcant.

PROPOSITIO 28.

Theorema.

Tab. II. Fig. 10. 230. *Corporis per* AP *deſcendentis vt hactenus poſuimus, celeritas in* P *tanta erit, vt ea aequaliter progrediens eodem tempore, quo per* AP *eſt delapſum, ſpatium duplo maius quam* AP *abſoluere poſſit.*

De-

Demonſtratio.

Manentibus, quae in praecedentibus poſuimus, corpore A, potentia g, ſpatio deſcripto x, celeritate in P acquiſita $\sqrt{v}$, et tempore deſcenſus t, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ (221), et $v = \frac{gx}{A}$ (204). Hanc ob rem habetur $\frac{g}{A} = \frac{v}{x}$, ideoque $t = \frac{x}{125\sqrt{v}} = \frac{2x}{250\sqrt{v}}$. At haec expreſſio dat tempus quoque, quo ſpatium $2x$ celeritate vniformi $\sqrt{v}$ percurritur, quia $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ eſt diuiſum per 250, quem numerum inuenimus ad tempus in minutis ſec. exprimendum (220). Conſequenter ſpatium $2x$ eodem tempore celeritate $\sqrt{v}$ percurritur, quo ſpatium x deſcenſu vniformiter accelerato. Q. E. D.

Corollarium 1.

231. Corpus igitur a potentia vniformi ſollicitatum deſcendens tempore t per ſpatium x tantam acquirit celeritatem, qua aequabiliter progrediens idem ſpatium x dimidio tempore t percurrere poterit.

Corollarium 2.

232. Quia in ſuperficie terrae corpora tempore minuti ſecundi per ſpatium 15625 ſcrup. pedis Rhenani delabuntur, tanta erit eorum celeritas hoc lapſu acquiſita, qua vniformi motu ſpatium 31250 ſcrup. minuto ſecundo, ſeu 15625 ſcrup. ſemi minuto ſecundo percurrent.

Corollarium 3.

233. Cum celeritas per radices quadratas ex altitudinibus, ex quibus lapſu acquiruntur, exprimere inſtituerimus, erit celeritas $\sqrt{15625}$ ſeu 125 tanta, qua minuto ſecundo ſpatium 31250 ſcrup. abſolui poteſt.

Corollarium 4.

234. Facile igitur erit ſpatium aſſignare, quod celeritate hoc modo expreſſa $\sqrt{v}$ minuto ſec. percurritur. Fiat enim, quia ſpatia eodem tempore deſcripta ſunt vt celeritates, vt 125 ad $\sqrt{v}$ ita 31250 ſcrup. ad $250\sqrt{v}$. Quo facto erit $250\sqrt{v}$ ſpatium in ſcrupulis expreſſum, ſiquidem altitudo v in talibus exhibeatur, quod celeritate $\sqrt{v}$ minuto ſecundo abſolui poteſt, motu ſcilicet aequabili.

Exemplum 1.

235. Delapſum ſit corpus ex altitudine 1000 ped. erit in ſcrupulis $v = 1000000$, quare ex hoc deſcenſu tantam acquirit celeritatem, qua minuto ſecundo ſpatium 250000 ſcrup. i. e. 250 pedes abſoluere poſſet.

Corollarium 5.

236. Et reciproce ſi celeritas per ſpatium, quod ea minuto ſecundo percurritur, exprimatur vt initio fecimus, reduci hinc ea poterit ad receptum noſtrum modum per radices ex debitis altitudinibus. Sit enim ſpatium illud a ſcrup. et altitudo huic celeritati debita v ſcrup. erit $250\sqrt{v} = a$ atque $v = \frac{a^2}{62500}$ ſcrup.

Exem-

Exemplum 2.

237. Habeat corpus tantam celeritatem qua minuto ſecundo ſpatium 1000 ped. ſeu 1000000 percurrere poteſt, erit altitudo huic celeritati debita $=\frac{1000000000000}{62500}$ ſcrup. ſeu 16000 pedes.

Scholion.

238. Perſpicitur igitur, quomodo vtrumque celeritates exprimendi modum inuicem comparari, alterumque ad alterum reduci oporteat. Initio enim celeritates per ſpatia exprimebamus, quae minuto ſecundo ſeu alio dato tempore percurruntur. Poſtmodum vero celeritates per altitudines debitas exhibere magis congruum viſum erat. Nunc vero monſtratum, quomodo vterque exprimendi modus ad celeritates menſurandas accommodandus ſit.

PROPOSITIO 29.

Problema.

239. *Potentia exiſtente vniformi ſecundum rectam* BP *trahente habeat corpus in initio* B *iam celeritatem datam ſecundum eandem directionem* BP, *requiritur eius celeritas in quouis puncto* P *rectae* BP. Tab. II. Fig. 11.

Solutio.

Sit vt ante potentia g, et corpus A. Celeritas vero, quam habet in initio B ponatur debita altitudini c. Vocetur BP$=x$, et celeritas in P, quam quaerimus, debita ſit altitudini v. Erit vt ante (207) ob potentiam conſtantem g per elementum $Pp=dx$ ſollicitantem $dv=\frac{gdx}{A}$. Integrando igitur

tur fit $v = \frac{gx}{A} +$ Conſt. quae quantitas conſtans ex eo eſt determinanda, quod facto $x = o$, fiat $v = c$ (per hyp.) erit ergo Conſt. $= c$. Conſequenter habebimus $v = c + \frac{gx}{A}$, et ipſam celeritatem $\sqrt{v} = \sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Ponatur vt ſit in caſu grauitatis ordinariae $\frac{g}{A} = 1$, erit $v = c + x$. Altitudo igitur celeritati in P debita eſt aggregatum altitudinis celeritati initiali in B debitae et ſpatii percurſi.

Scholion.

241. Alia hic occurrit ſolutio problematis, poſſumus enim motum per BP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ in B conſiderari vt partem motus per lineam AP ex quiete, vt ante poſuimus factum, in quo corpus, cum ex A in B peruenerit, habeat celeritatem propoſitam $\sqrt{c}$. Sit igitur hoc ſpatium AB $= k$, erit $c = \frac{gk}{A}$ (206), et $v = \frac{g(k+x)}{A} = c + \frac{gx}{A}$, vt iam eſt inuentum. Spatium autem AB erit $\frac{Ac}{g}$.

PROPOSITIO 30.

Problema.

242. *Iisdem quibus in praecedente propoſitione poſitis, determinare tempus, quo ſpatium* BP *percurritur.*

Solutio.

Sit tempus per ſpatium BP $= t$, erit $dt = \frac{mdx}{\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}}$ (218); eſt enim celeritas, qua elementum Pp percur-

curritur $V(c+\frac{gx}{A})$ vt in praecedente propoſitione reperimus. Integrando igitur fiet $t=\frac{2mA}{g}V(c+\frac{gx}{A})$ $+$Conſt. Conſtans haec vero quantitas addenda ex hoc definietur, quod poſito $x=o$, fieri debeat $t=o$. Prodibit igitur Conſt. $=\frac{-2mA}{g}Vc$. Conſequenter habetur $t=\frac{2mA}{g}V(c+\frac{gx}{A})-\frac{2mA}{g}Vc$. Expreſſis c et x in ſcrupulis ped. Rhen. poſitoque $m=\frac{1}{250}$ (220), proueniet tempus in minutis ſecundis expreſſum. Q. E. I.

Corollarium.

243. Quia in noſtris terreſtribus regionibus eſt $\frac{g}{A}=1$, erit tempus quo ſpatium BP cum celeritate in B initiali Vc abſoluitur $=\frac{1}{125}V(c+x)-\frac{1}{125}Vc$ minut. ſecund. ſiquidem c et x in ſcrupulis pedis Rhenani exprimantur.

Scholion.

244. Simili modo aliam huius problematis afferimus ſolutionem, quo praecedentis in ſcholio annexo. Poſita enim recta AB$=k$, ex qua corpus A delabens in B adipiſcitur celeritatem altitudini c debitam, erit tempus, quo hoc ſpatium AB abſoluitur $=\frac{1}{125}V\frac{Ak}{g}$ et tempus, quo ſpatium AP percurritur erit $\frac{1}{125}V\frac{A(k+x)}{g}$(221). Tempus, quo hoc deſcenſu ſpatium BP abſoluitur erit $\frac{1}{125}V\frac{A(k+x)}{g}-\frac{1}{125}V\frac{Ak}{g}$. Eſt vero $k=\frac{Ac}{g}$(241). Conſequenter hoc tempus quaeſitum per BP fiet $=\frac{A}{125g}V(c+\frac{gx}{A})-\frac{1}{125g}Vc$, vt ante inuenimus, ſi quidem ibi loco m ponatur $\frac{1}{250}$. Atque haec ſunt, quae de punctorum deſcenſu rectilineo

neo in hypotheſi potentiae vniformis exponenda erant. Pergo igitur ad aſcenſus rectilineos, in quibus celeritatis directio eſt directe contraria directioni potentiae, quam etiam nunc vniformem ſeu conſtantem ponam.

PROPOSITIO 31.
Problema.

Tab. II. Fig. 12. 245. *Potentia vniformi tendente deorſum, habeat corpus in* B *celeritatem datam ſurſus directam; requiritur eius celeritas in quouis puncto ſpatii* BA, *quod aſcenſu percurrit.*

Solutio.

Perſpicuum eſt hoc caſu corpus in linea recta eſſe progreſſurum motu retardato (191), quia eius directio motus directe eſt contraria potentiae ſollicitantis directioni. Sit itaque celeritas in B debita altitudini c, et ponatur corpus iam perueniſſe in P. Vocetur altitudo, cui celeritas hoc loco debetur, v, ſpatiumque ipſum iam percurſum BP, x. Capiatur $Pp = dx$, erit in p altitudo celeritati debita $v + dv$. Quia autem potentia, quam pono $= g$, motui eſt contraria; tota in diminuendo motu conſumitur. Quam ob rem dv aequale poni oportet ipſi $\frac{-gdx}{A}$ denotante A corporis maſſam. Cum itaque ſit $-dv = \frac{gdx}{A}$; erit integrando $C - v = \frac{gx}{A}$. Ad conſtantem C definiendam ponatur $x = o$, quo caſu v in c transmutari debebit; eritque ideo $C = c$. Ex quo prodibit iſta aequatio $c - v = \frac{gx}{A}$ ſeu $v = c - \frac{gx}{A}$, quae determinat ce-

celeritatem corporis in quouis puncto ſpatii aſcenſu deſcripti. Q. E. I.

Corollarium 1.

246. Celeritas igitur corporis euaneſcet, quando fit $c = \frac{gx}{A}$, i. e. quando peruenit ad altitudinem $x = \frac{Ac}{g}$. Sit BA iſta altitudo ideoque aequalis $\frac{Ac}{g}$, inde $c = \frac{BA.g}{A}$, ex quo intelligitur BA eam ipſam eſſe altitudinem, ex qua corpus A a potentia g ſollicitatum deſcendendo acquirit celeritatem c (206). Corpus igitur ea celeritate, quam ex data altitudine delapſum eſt adeptum, ſurſum progrediens ad eam ipſam pertinget altitudinem, antequam motum ſuum amittit.

Corollarium 2.

247. Praeterea corpus aſcendens per ſpatium BA in ſingulis punctis eas ipſas habet celeritates quas ibidem haberet, ſi ex A deſcendiſſet. Poſita enim $AP = y$, erit celeritas in P deſcenſu ex A nata $= \sqrt{\frac{gy}{A}}$; at eſt celeritas in eodem loco P aſcenſu ex B relicta $\sqrt{(c - \frac{gx}{A})}$. Quia autem eſt $x + y = BA = \frac{Ac}{g}$, patet has expreſſiones celeritatum eſſe aequales nempe $\frac{gy}{A} = c - \frac{gx}{A}$.

Corollarium 3.

248. Congruit igitur motus corporis aſcendentis cum motu deſcendentis, atque vtriusque celeritates in iisdem locis, i. e. in iisdem a puncto ſupremo, quo celeritas euaneſcit, diſtantiis, erunt aequales.

Corollarium 4.

249. Ex his perſpicitur, tempus quoque aſcenſus per ſpatium BA aequale eſſe tempori deſcenſus per idem ſpatium; Quare cum dicto $BA = a$, tempus deſcenſus ſit $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Aa}{g}}$ min. ſec. (221); eidem valori aequale eſſe debebit tempus aſcenſus per BA; ſeu poſito loco a eius valore $\frac{Ac}{g}$, erit tempus integri aſcenſus $= \frac{A}{125g} \sqrt{c}$.

Corollarium 5.

250. Simili modo tempus aſcenſus per quamvis portionem BP definietur, manente enim $AP = y$ erit tempus ſiue aſcenſus ſive deſcenſus per AP $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Ay}{g}}$, quod ablatum ab integro tempore aſcenſus $\frac{A}{125} \sqrt{c}$ relinquet tempus per portionem BP. Eſt vero $y = \frac{Ac}{g} - x$, quare tempus aſcenſus per BP habebitur $= \frac{A}{125g} \sqrt{c} - \frac{A}{125g} \sqrt{(c - \frac{gx}{A})}$.

Scholion I.

251. Euidenter vero haec aequalitas aſcenſuum a priori oſtendi poteſt ex ipſa potentiarum actione. Cum enim in aſcenſu potentia tantum de celeritate auferat, quantum in deſcenſu ad eam addit, perſpicuum eſt perfectam aequalitatem inter vtrumque motum verſari debere, neque aliud eſſe diſcrimen, niſi temporis ordinem, qui cogitatione duntaxat inuerſus alterum caſum in alterum transformat. Similis vero eſt ratio etiam omnium motuum a potentiis abſolutis productorum: iisdem enim celeritatibus per eandem viam reuerti poterit cor-

corpus, ſi quidem in reditu impreſſiones easdem, quas in itu, ſed contrarias patitur. Sic planetae in plagas contrarias circa ſolem eodem modo, quo nunc, in ellipſibus mouerentur, ſi initio motus ipſis fuiſſent his contrarii. Nam per idem ſpatii elementum effectus potentiae ad celeritatem immutandam idem eſt ſemper, atque fit ratione corporis negatiuus, quando reuertitur. Effectus autem, qui ad directionem corporis immutandam impenditur, vtroque caſu manet, quo fit vt corpus in itu et reditu eandem percurrat ſemitam. Sed haec infra clarius patebunt, vbi de huius modi motibus ex inſtituto agetur. At vero, ſi adeſt reſiſtentia, haec inter ascenſus et deſcenſus ſimilitudo euanescit: nam in vtroque caſu reſiſtentia motum corporis minuit, neque effectus eius in altero alterius eſt oppoſitus, quemadmodum vſu venit, ſi potentia ſollicitans eſt abſoluta.

Scholion 2.

252. Satis igitur expoſito motu rectilineo, qui a potentiis vniformibus oritur, pergendum eſt ad potentias difformes, quae aliis in locis alias exercent in corpora vires, atque exponendum, quomodo motus corporum, quatenus fiunt in linea recta, ab iis varientur. Huiusmodi enim difformitati omnes potentiae, quas in mundo obſeruamus, ſunt obnoxiae, neque vlla potentia poteſt aſſignari, quae corpus, in quocunque loco ſit poſitum, aequaliter afficiat. Sic planetae, quo ſoli ſunt propiores, ve-

hementius ad ſolem attrahuntur, et quo magis etiam corpus a ſuperficie terrae remouetur, minor in eo fit grauitas ſeu niſus deorſum. Simili haec fere accidunt modo, quo magnetem obſeruamus idem ferri fruſtum in minore diſtantia fortius, in maiore vero debilius attrahere. Quamcunque igitur potentiae diſtantiarum ſeu poſitionum corporis teneant rationem, leges eruemus, ſecundum quas motus corporis ſollicitati immutatur. Et primo quidem potentias poteſtati cuidam diſtantiarum corporis a puncto fixo proportionales contemplabimur.

DEFINITIO 16.

253. Centrum virium vocatur punctum illud fixum, ad quod corpora attrahuntur vi, quae pendet a diſtantia ab hoc puncto, ſeu quae eſt vt functio diſtantiae quaecunque.

Corollarium 1.

254. Datur igitur diſtantia ab hoc centro virium, in qua corpus poſitum tanta vi ad centrum trahitur quanta foret vis eius grauitatis, ſi in ſuperficie terrae verſaretur.

Corollarium 2.

255. Cognita ergo hac diſtantia, et lege attractionis ſcilicet functione diſtantiae, cui attractio eſt proportionalis; innoteſcet ratio, quem habet corporis vbicunque poſiti conatus accedendi ad centrum virium, ad eiusdem corporis vim grauitatis, ſi eſſet in terrae ſuperficie.

Co-

Corollarium 3.

256. Cum itaque hoc modo vires vtcunque variabiles cum vi grauitatis comparare liceat, quia huius in corpora effectus eſt cognitus; cuiuscunque etiam vis in corpora effectus poterit determinari.

Scholion 1.

257. Pono hic attractionem centrorum virium ſimilem vi grauitatis, ita vt quoque diuerſorum corporum in eadem diſtantia poſitorum conatus ad centrum ſint vt maſſae ipſorum, ideoque vires acceleratrices omnium aequales (212). In his igitur pertractandis maſſam corporis moti non opus eſt in computum vocare, ſed vim acceleratricem duntaxat, quae conatui accedendi ad centrum diuiſo per maſſam eſt proportionalis. Comparabitur ea autem cum vi grauitatis acceleratrice, quam ponimus $=1$, atque ad hanc vnitatem reuocabimus omnes vires potentiarum acceleratrices, quippe quantitates homogeneas.

Corollarium 4.

258. Quando itaque dicemus vires eſſe diſtantiis a centro virium ſeu cuidam functioni earum proportionales, id non de ſolis niſibus, quos corpora habent ad centrum, ſed de viribus acceleratricibus, i. e. de niſibus ad maſſas corporum applicatis intelligi debebit.

Corollarium 5.

259. Quoniam igitur potentiae directio, qua corpus vrgetur, ſemper tendit ad centrum virium;

ſpicuum eſt, ſi corpus vel quieſcit, vel motum habet, cuius directio per centrum virium tranſit, tum corpus in hac linea recta per centrum virium tranſeunte perpetuo moueri debere. (189).

DEFINITIO 17.

260. Potentia, quae corpora ad huiusmodi virium centrum vrget, vocatur vis centripeta. Haecque, ſi ſit negatiua, vt corpora ab hoc centro repellat, vocatur vis centrifuga.

Corollarium 1.

261. Cum hic de motu ſit quaeſtio, vis centripeta nobis erit vis acceleratrix ſeu conatus corporis ad centrum tendentis diuiſus per corporis maſſam.

Corollarium 2.

262. Conatus igitur ſeu niſus, quem habet corpus ad centrum virium, exprimitur vi centripeta in corporis maſſam ducta. Quamobrem erit ad pondus eiusdem corporis, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum, vt vis centripeta ſeu vis acceleratrix ad vnitatem. (257.)

Scholion.

263. *Neutonus*, qui voce vis centripetae potiſſimum vtitur, triplici modo eandem menſurari poſſe animaduertit. Primo quantitate eius abſoluta, qua efficaciam ipſius centri virium metitur, ſine reſpectu habito ad corpora attracta; ſic dicit in maiore magnete maiorem ineſſe vis centripetae quantitatem

tem abſolutam, in minore minorem. Et ſimili modo ſecundum eius theoriam in ſole quantitas abſoluta maior eſt quam in terra. Haec comparatio autem intelligenda eſt de centris virium ſimiliter i. e. ſecundum eandem diſtantiae functionem attrahentibus, in diſſimilibus enim huiusmodi comparatio locum non habet. Haec ergo quantitas abſoluta menſuranda eſt ex conatu, quem datum corpus in data diſtantia habet verſus virium centrum. Loco huius autem conſiderationis hic adhibeo diſtantiam in qua corpus poſitum vi aequali ponderi eius nititur ad centrum (254). Secundo habet vis centripetae quantitatem accelerantem, quae apud ipſum eodem accipitur ſenſu, quo hic ipſa vis centripeta (261), menſuratur enim conatu ad maſſam applicato. Tertio inducit vis centripetae quantitatem motricem qua nihil aliud denotat niſi ipſum conatum, quem corpora habent ad centrum virium accedendi; quantitas motus enim, quam menſurare ſoliti ſunt celeritate ducta in maſſam, quaeque dato tempore generatur, proportionalis eſt ipſi conatui. Poſito namque conatu hoc p, maſſa A, eſt celeritatis incrementum dato tempuſculo vt $\frac{p}{A}$ (154), quod ductum in maſſam A dat incrementum quantitatis motus, quod itaque ipſi p erit proportionale.

PROPOSITIO 32.
Problema.

264. *Sit centrum virium C, quod attrahat ad ſe in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum; ad* Tab. II. Fig. 13.
hoc-

hocque trahatur corpus in A *quieſcens: quaeritur eius celeritas in quouis puncto ſpatii* AC.

Solutio.

Sit AC$=a$; AP$=x$; et celeritas quam in P habebit ſit debita altitudini v. Fiat attractio in ratione n cuplicata diſtantiarum, et deſignet f eam diſtantiam a C, in qua corporis conatus ad C aequalis eſt ponderi corporis, ſi eſſet in terrae ſuperficie poſitum. Vis igitur acceleratrix, qua corpus in P vrgetur ad C erit ad vim grauitatis, quam pono $=1$, vt CP^n i. e. vt $(a-x)^n$ ad f^n; quamobrem ea exprimetur per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Sumto ergo $Pp=dx$, erit $dv =\frac{(a-x)^n dx}{f^n}$. Eſt enim dv aequale dx multiplicato per vim acceleratricem (213). Integrata hac aequatione prodibit $v=C-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ad conſtantem C definiendam ponatur $x=o$, quo caſu fieri debet per hypotheſin $v=o$, fiet ergo $C=\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Habebitur ergo $v=\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Seu poſito $a-x$ $=$ CP$=y$; erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua aequatione celeritas corporis in quouis loco ſpatii AC cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium I.

265. Si $n+1$ eſt numerus poſitiuus, euaneſcet y^{n+1} facto $y=o$. Hoc igitur caſu altitudo celerita-

ritati, quam corpus in C perueniens habebit debita erit $= \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. At ſi $n+1$ eſt numerus negatiuus, fiet y^{n+1}, facto $y=o$, infinite magnum: hoc ergo caſu corporis in C peruenientis celeritas erit infinite magna.

Corollarium 2.

266. Sed ſi eſt $n+1=o$ ſeu $n=-1$, ex inuenta aequatione valor ipſius v non cognoſcitur ob numeratorem et denominatorem euaneſcentes. Quamobrem hunc caſum ex ipſa aequatione differentiali oportebit repetere. Erit autem $dv=\frac{fdx}{a-x}$, cuius integralis eſt $v=C-fl(a-x)$. Debebit autem eſſe $C=fla$, quocirca prodibit $v=fl\frac{a}{a-x}=fl\frac{a}{y}$. Qui eſt verus valor ipſius v quando habetur $n=-1$, i.e. quando vis centripeta eſt reciproce vt diſtantia a centro virium.

Corollarium 3.

267. Hoc igitur caſu, quo $n=-1$, cum corpus peruenerit in centrum C, celeritas eius erit infinite magna; fit enim $v=fl\infty$. Qui infinitorum gradus eſt infimus et quaſi proximus finito; quantumuis enim parum $n+1$ cyphram excedat, ſubito celeritas in C fit finita.

Corollarium 4.

268. Cum autem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus, quia tum altitudo celeritatis in c debita eſt $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, erunt ipſae celeritates plurium corporum

O ad

ad centrum C delabentium, quas in C habebunt, vt $a^{\frac{n+1}{2}}$ i. e. in ratione $\frac{n+1}{2}$ plicata diſtantiarum ex quibus lapſum inchoauerunt.

Scholion I.

269. Poſtquam autem corpus ex A in C peruenit, quo tum promoueatur, non tam facile poteſt definiri. Videtur quidem, ſi in expreſſione inuenta y ponatur negatiuum, proditura eſſe altitudo celeritati in Q debita, quae ſi eſt affirmatiua, corpus reuera in Q perueniet; ſin vero ſit negatiua, indicio hoc eſt corpus nunquam vltra C in plagam CQ eſſe peruenturum. Verum hic motum proſequendi modus non ſemper adhiberi poteſt; ſaepe enim ipſi hypotheſi, qua ponitur vis attractiua cis et vltra C verſus centrum eadem, eſt contrarius. Namque corpus in P exiſtens, quia trahitur deorſum, cum in Q peruenerit, ſurſum vrgebitur aequali vi, ſi eſt CQ=CP. Hanc ob rem vis, qua corpus in Q ſollicitatur, ſit negatiua ratione prioris, atque idcirco quantitate negatiua eſt exprimenda. Vis igitur in P per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$ ſeu $\frac{y^n}{f^n}$ expreſſa ſui fieri debet negatiua, cum $-y$ ponitur loco y, id quod nunquam euenit, niſi ſit n vel numerus impar vel fractio, cuius numerator et denominator ſunt numeri impares. His igitur in caſibus prodibit verus valor ipſius v, cum corpus in Q peruenerit; in reliquis ſemper, quia in calculo vis ſollicitans corpus in Q cum vero eius valore non congruit, veritati non conſentanea lit-

litterae v quantitas elicitur. Si enim eſt n numerus par vis attrahens in Q facto n negatiuo aequalis erit vi in P et tendet in eandem plagam deorſum ſcilicet; Ex quo fit, vt corpus transgreſſum centrum C in recta CQ in infinitum deberet descendere, id quod etiam calculus declarat. Quod cum pugnet cum hypotheſi perſpicuum eſt his caſibus motum corporis, poſtquam in C peruenit, ex inuenta formula definiri non poſſe. Abſurdum autem magis elucet quando eſt $n = \frac{1}{2}$ vel alia huiusmodi fractio, quae y^n transmutat in quantitatem imaginariam, poſito $-y$ loco y; id quod indicaret corpus vltra C progreſſum nonſolum non ad C attrahi, ſed vim attrahentem etiam fieri imaginariam, quod quid ſit nequidem intelligi poteſt.

Corollarium 5.

270. Si igitur n eſt numerus impar, valor ipſius v, qui eſt $\frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)y^n}$ non mutatur poſito $-y$ loco $+y$, quia $n+1$ exponens ipſius y euadit numerus par. Ex quo apparet celeritatem corporis in Q aequalem fore ei, quam habet in P, ſi quidem eſt CQ = CP. Pari ergo modo corpus in directione CQ recedit, qua ante per AC acceſſerat; pertingetque in B vsque, ita vt ſit AB = AC, vbi celeritatem ſuam perdet omnem. Reuertetur itaque ſimili modo ad C, et tum rurſus in A perueniet. Quos motus reciprocos, niſi adeſt reſiſtentia, perpetuo perficiet.

Corollarium 6.

271. Excipiendus eſt tamen caſus, quo $n = -1$, quanquam -1 eſt numerus impar. Facto enim y negatiuo fit $v = fl\frac{-a}{y}$, quae eſt quantitas imaginaria. Ex quo perſpicitur corpus nunquam vltra C eſſe transgreſſurum. Aliud ergo iudicium ferendum esſe videtur, quando n eſt numerus negatiuus, etiamſi impar. Huiusmodi enim ſimile exemplum infra occurret ſi $n = -3$. (335).

Scholion 2.

272. Hoc quidem veritati minus videtur conſentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate ſua infinite magna, quam in C acquiſiuit, in aliam potius plagam, quam in CB, ſit progreſſurum; praeſertim cum huius celeritatis infinitae directio ſit ſecundum hanc plagam. Quicquid autem ſit hic calculo potius, quam noſtro iudicio eſt fidendum, atque ſtatuendum, nos ſaltum, ſi fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac ſententia confirmamur ſimili exemplo, quod infra plene explanatum occurret, (655) ſi eſt $n = -2$; hoc enim caſu corporis in C peruenientis celeritas quoque eſt infinita, et ſecundum CB directa, nihilo vero minus corpus non vltra C progreditur, ſed ſubito ex C verſus A reuertitur pariter ac acceſſerat. Ex quo perſpicitur, quoties celeritas in C exiſtat infinita, iudicium de vlteriori corporis motu eſſe ſuſpendendum. Tam diu autem hoc tantum ſiat, quoad ad motus curuili-

lineos perueniamus; ex iisque enim qui ſint rectilinei, euidentius colligetur (762). Neque enim calculus, qui tum inſtituetur, obnoxius eſt huic incommodo, vt a hypotheſi diſſentiat; ſed quaquaverſus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.

Scholion 3.

273. Semper autem, quando celeritas in C non eſt infinite magna, id quod accidit, quoties eſt $n+1$ numerus affirmatiuus, motum corporis integrum iudicio noſtro poterimus cognoſcere, etiamſi calculus ſit inſufficiens. Si enim celeritas in C eſt finita, habensque directionem ſecundum CB, quam neceſſario habere debebit; fieri non poteſt, vt non in CB motum continuet. Simili autem modo hunc motum continuans a C recedet, quo ante in AC acceſſerat, atque in puncto quocunque Q eandem habebit celeritatem, quam ante in P puncto aeque diſſito a C habebat; ſicut ex (251) intelligi poteſt. Perpetuo igitur motus reciprocos ex A in B et viciſſim rediens corpus perficiet.

PROPOSITIO 33.
Problema.

274. *Centro* C *attrahente in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum, habeat corpus in* D *iam celeritatem datam; Requiritur punctum* A *in recta* CD *producta, ex quo corpus deſcenſum ad* C *inchoans cum in* D *peruenerit, hanc ipſam acquirat celeritatem.* Tab. II. Fig. 14.

Solutio.

Denotante vt ſupra n exponentem rationis multiplicatae in qua fit vis centripeta, et f diſtantiam in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis; ſit CD$=b$, celeritas in D debita altitudini h, et quaeſita diſtantia CA ponatur $=q$. Cum igitur hic q idem denotet quod ſupra a, et b idem quod y, et h idem quod ibi v, habebitur iſta aequatio $h=\frac{q^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua fit $q^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)hf^n$, atque $q=(b^{n+1}+(n+1)hf^n)^{\frac{1}{n+1}}$. Particulari autem caſu quo $n=-1$ habebitur $h=fl\frac{q}{b}$, hincque $q=e^{\frac{h}{f}}b$, vbi e eſt numerus cuius logarithmus eſt vnitas. Q. E. I.

Corollarium 1.

275. Si vis centripeta eſt directe vt diſtantia fit $n=1$, eritque $q=\sqrt{(b^2+2fh)}$. Quae quantitas ſemper eſt finita, ſi modo b, f et h ſunt tales. Simile euenit ſemper dummodo $n+1$ eſt numerus affirmatiuus. Atque etiam in caſu $n=-1$, diſtantia q nunquam fit infinita.

Corollarium 2.

276. Sit autem $n+1$ numerus negatiuus puta $-m$, vt ſit $n=-m-1$, erit $q=b\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^mh}}$ quae altitudo toties eſt infinita, quoties eſt $h=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$, et, ſi h eſt quantitas adhuc maior, fit q ne-

ga-

gatiua, ſeu potius infinito maior, vel etiam imaginaria. Ex quo intelligitur his caſibus, ne ex infinita quidem diſtantia corpus delapſum tantam in D acquirere poſſe celeritatem.

Corollarium 3.

277. Manente $n+1$ numero negatiuo $-m$, et diſtante puncto A in infinitum; erit $b = \frac{f^{m+1}}{mb^m}$. Atque diſtantia a centro C, in qua corpus, ex ſpatio infinito delapſum, celeritatem habet $\sqrt{b}$, erit $= f\sqrt[m]{\frac{f}{mb}}$.

Corollarium 4.

278. Si vis centripeta reciproce proportionalis eſt diſtantiarum quadratis, erit $m=1$. Quapropter fit $q = \frac{bf^2}{f^2-bb}$. Quando ergo eſt $b = \frac{f^2}{b}$, diſtantia AC i. e. q fit infinite magna.

Corollarium 5.

279. Si hoc problema cum praecedente coniungatur, facile determinabitur motus corporis, quod ex D deſcenſum ad C inchoat celeritate $\sqrt{b}$: Ex praecedente enim innoteſcit deſcenſus corporis ex A factus, cuius cum ſit deſcenſus ex D celeritate $\sqrt{b}$ inceptus pars, vocetur CP$=y$, et celeritas quam corpus in P habet, debita ſit altitudini v, erit $v = \frac{q^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ (266). Eſt autem $q^{n+1} = b^{n+1} +$

(n+1)

$(n+1)hf^n$. Vnde fit $v = \frac{b^{n+1} + (n+1) hf^n - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$
$= \frac{b^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n} + h$.

Corollarium 6.

280. Expreſſio haec ipſius v, quando deſcenſus ex D incipitur celeritate altitudini h debita, non differt ab ea, quae prodit, ſi deſcenſus ex quiete fieret, niſi hoc, quod ſit hac ipſa quantitate h vbique maior.

Scholion.

Tab. II. Fig. 13. 281. Quod ad tempora attinet quibus in quauis hypotheſi vis centripetae ſpatium AC eiusque partes abſoluuntur, ea facile ex cognitis celeritatibus cognoſcentur. Pro generali quidem valore litterae n tempus non poteſt in terminis finitis exhiberi, quippe tempus per AP inuenitur $= \int \frac{dx\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(a^{n+1} - (a-x)^{n+1})}}$ quae quantitas vniuerſaliter neque integrari neque ad cognitarum curuarum quadraturas poteſt reduci. Attamen in variis ipſius n caſibus ſatis concinne exprimi poteſt, quamobrem miſſis generalibus praecipuos caſus ſpeciales ſequentibus propoſitionibus ſumus complexuri.

PROPOSITIO 34.

Problema.

Tab. II. Fig. 15. 282. *Si fuerit vis centripeta diſtantiis a centro* C *proportionalis, et corpus ex* A *in* C *vsque delabatur;*

tur; determinari oporteat tempus, quo corpus quamque huius ſpatii partem abſoluat.

Solutio.

Poſitis $AC=a$, et diſtantia a centro C in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis $=f$, ſit ſpatii quaeuis portio $CP=y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo tempus, quo ſpatium CP abſoluitur $\int\frac{dy}{\sqrt{v}}$, negligo hic fractionem $\frac{1}{250}$, quia haec tempori in minutis ſecundis cognoſcendo inſeruit, et cum libuerit, poteſt adiungi. Eſt vero ex prop. 32 facto $n=1$, $v=\frac{a^2-y^2}{2f}$, ergo $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$. Ex quo fit tempus per $PC=\int\frac{dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{\sqrt{2f}}{a}\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Super AC conſtruatur circuli quadrans AME, in eoque ducantur applicatae CE, PM. Quo facto erit, vt conſtat, arcus $EM=\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quamobrem tempus per PC fiet $=\frac{EM.\sqrt{2f}}{a}$. Tempus igitur totius deſcenſus per AC erit $=\frac{AME.\sqrt{2f}}{a}$. Hinc erit tempus deſcenſus per $AP=\frac{AM.\sqrt{2f}}{a}$. Ex his igitur tempus deſcenſus per quamuis ſpatii percurſi portionem innoteſcit, idque in minutis ſecundis, ſi hae expreſſiones per 250 diuidantur, et longitudo f in partibus milleſimis pedis Rhenani exhibeatur. Q. E. I.

Corollarium I.

283. Denotet $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $2AME:a=\pi:1$, et $\frac{AME}{a}=\frac{\pi}{2}$. Hanc ob rem erit tempus deſcenſus per $AC=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$.

Id quod non pendet ab altitudine lapſu percurſa a, ſed quantacunque haec ſit, eundem valorem retinet. Omnia igitur corpora, quae ad hoc centrum delabuntur aequalibus temporibus eo peruenient.

Scholion.

284. Sequitur haec temporum aequalitas ex ipſa celeritatis expreſſione $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$ in qua a et y vnam dimenſionem habere cenſenda ſunt. Quoties enim hoc euenit tempora, quibus quaecunque ſpatia a percurruntur, debebunt inter ſe eſſe aequalia. (46.)

Corollarium 2.

285. Si praeterea aliud ſit huiusmodi centrum virium, ſed diuerſa praeditum efficacia, ita vt diſtantia, in qua centripeta vis aequalis eſt grauitati, ſit F, erunt tempora descenſum ad vtrumque centrum inter ſe vt $\sqrt{f}$ ad $\sqrt{F}$. Sed efficaciae ipſae hoc caſu tenent inuerſam rationem diſtantiarum f : F, ſunt enim vt vires, quas haec centra exercent in aequalibus diſtantiis. Quapropter tempora descenſuum ad diuerſa huiusmodi virium centra ſunt in ratione reciproca ſubduplicata efficaciarum. Quae quidem ratio in omnibus ſimilibus centris virium locum tenet, ſi ſpatia percurſa ſunt inter ſe aequalia, vt in ſequenti docebitur.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tab. III. Fig. 1.

286. *Si fuerit vis centripeta quadratis diſtantiarum a centro* C *reciproce proportionalis, et cor-*

corpus ex A *in* C *vsque delabatur: inueniendum eſt tempus, quo corpus quamuis huius ſpatii* AC *portionem percurrat.*

Solutio.

Manente AC$=a$, et diſtantia in qua vis centripeta grauitati aequalis eſt f; ſit CP$=y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo ob $n=-2$, ex prop. 32, $v=f^2(\frac{a-y}{ay})$ et $\sqrt{v}=f\sqrt{\frac{a-y}{ay}}$. Elementum igitur temporis $\frac{dy}{\sqrt{v}}$ fit $=\frac{dy\sqrt{ay}}{f\sqrt{(a-y)}}=\frac{\sqrt{a}}{f}\cdot\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Conſequenter tempus per PC eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Eſt vero $\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}=-\sqrt{(ay-y^2)}+\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Quare deſcripto ſuper AC ſemicirculo AMC ductaque ordinata PM erit CM$=\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$ et PM$=\sqrt{(ay-y^2)}$. Propterea prodibit tempus per CP$=\frac{\sqrt{a}}{f}$(CM$-$PM), atque ex hoc tempus totius deſcenſus per AC$=$ $\frac{\text{AMC}.\sqrt{a}}{f}$. Tempus ergo, quo portio AP abſoluitur, eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}$(AM$+$PM). Q. E. I.

Corollarium 1.

287. Denotante igitur $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit AMC$=\frac{1}{2}a\pi$. Ideoque erit tempus deſcenſus per AC$=\frac{\pi a\sqrt{a}}{2f}$. Ex quo intelligitur plurium corporum ad C delabentium tempora deſcenſuum eſſe in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum.

Corollarium 2.

288. Atque ad diuerſa huiusmodi centra virium corpora accedent temporibus, quae ſint in ratione compoſita ex directa ſesquiplicata diſtantiarum et inuerſa ſubduplicata efficaciarum. Eſt enim efficacia directe vt diſtantiae f quadratum.

Scholion.

289. Si ſit vis centripeta reciproce vt cubus diſtantiae, prodit $n=-3$ et $v=\frac{f^3}{2}\left(\frac{a^2-y^2}{a^2y^2}\right)$. Eſt igitur $\sqrt{v}=\frac{f}{ay}\sqrt{f\frac{(a^2-y^2)}{2}}$, et tempus per CP $=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ $(a-\sqrt{(a^2-y^2)})$. In circuli autem quadrante eſt PM $=\sqrt{(a^2-y^2)}$; tempus ergo, quo CP abſoluitur et $=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$(AC–PM), et tempus, quo totum ſpatium AC percurritur eſt $\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ AC ſeu $\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. Conſequenter tempus, quo portio AP percurritur erit $=\frac{AC.PM\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. In hoc igitur caſu tempus algebraice poteſt exhiberi, id quod etiam fit in hisce caſibus quibus n eſt terminus huius ſeriei $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{9}{7}$, $-\frac{11}{9}$, etc. Quae autem ſint ipſa tempora ſaltem integra deſcenſuum per AC ſumus inueſtigaturi.

PROPOSITIO 36.

Problema.

290. *Determinare tempus deſcenſus per* AC *ad centrum virium* C, *ſi vis centripeta proportionalis*

lis eſt reciproce huic diſtantiarum dignitati cuius exponens eſt $\frac{2m+1}{2m-1}$ *denotante* m *numerum integrum affirmatiuum.*

Solutio.

Retinentibus a, f, y et v eosdem, quos ſupra, valores erit $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$. Quo circa fit $v = \frac{2m-1}{2} f^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left(\frac{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}}\, y^{\frac{2}{2m-1}}} \right)$, adeoque $\int \frac{dy}{\sqrt{v}} =$

$$\sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1) f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{y^{\frac{1}{2m-1}}\, dy}{\sqrt{(a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}})}},$$

quod integrale ita debet accipi, vt euanescat poſito $y=0$. Quo facto ſi ponatur $y=a$, prodibit tempus totius descenſus per AC quaeſitum. Ponatur $y^{\frac{2}{2m-1}} = z$, et $a^{\frac{2}{2m-1}} = b$, erit $y^{\frac{1}{2m-1}} = \sqrt{z}$ et $dy = \frac{2m-1}{2} z^{\frac{2m-3}{2}} dz$, quibus ſubſtitutis fiet $\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{(2m-1)a^{\frac{2}{2m-1}}}{2 f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{z^{m-1}\, dz}{\sqrt{(b-z)}}$.

Ad $\int \frac{z^{m-1}\, dz}{\sqrt{(b-z)}}$, inueniendum pono $b-z=u^2$, erit $z=b-u^2$ et $dz=-2udu$, ideoque $\frac{z^{m-1}\, dz}{\sqrt{(b-z)}} = -2du(b-u^2)^{m-1} = -2du(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1} b^{m-2}u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} b^{m-3}u^4 - \text{etc.})$ cuius integrale eſt $C - 2u(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1.3} b^{m-2}u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,5} b^{m-3}u^4 - \text{etc.})$, quae quantitas

titas cum debeat euaneſcere facto y ſeu $z = o$, i.e. $u^2 = b$, erit $C = 2b^{m-\frac{1}{2}}(1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \text{etc.})$ Quia autem integrum tempus prouenit facto $y = a$ ſeu $z = b$, i. e. $u = o$, remanebit pro integrali ipſius $\frac{z^{m-1}dz}{\surd(b-z)}$ ſola quantitas C, quae loco $b^{m-\frac{1}{2}}$ reſtituto a eſt $= 2a(1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} +$ etc.). Totum ergo deſcenſus tempus per AC aequabitur facto ex $\frac{a^{\frac{2m}{2m-1}}}{f^{\frac{2m}{2m-1}}}\surd 2(2m-1)f$ in hanc ſeriem $1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} +$ etc. quae toties abrumpitur, quoties m eſt numerus integer affirmatiuus. His igitur in caſibus tempus algebraice poteſt exhiberi. Q. E. I.

Corollarium 1.

291. Sit $m = 1$, quo caſu eſt $n = -3$, erit ſeries $= 1$; tempus ergo deſcenſus per AC prodibit $= \frac{a^2}{f^2}\surd 2f = \frac{a^2\surd 2}{f\surd f}$ vt ſupra (289) eſt inuentum.

Corollarium 2.

292. Si ſit $m = 2$, quo caſu ſit $n = \frac{-5}{3}$, erit ſeriei valor $= \frac{2}{3}$, atque tempus totius deſcenſus $= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}}\surd 6f$. Sin eſt $m = 3$, erit $n = \frac{-7}{5}$, et ſeries $= \frac{2.4}{3.5}$

tem-

tempusque $\frac{2.4\, a^{\frac{6}{5}}}{3.5.f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10f}$. Simili modo ſi eſt $m=4$, fit $n=\frac{-9}{7}$, atque tempus prodibit $=\frac{2.4.6.a^{\frac{8}{7}}}{3.5.7.f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14f}$.

Corollarium 3.

293. Colligitur ex his ſeriei valor generalis $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7.\ldots\ldots\ldots(2m-1)}$. Generatim igitur tempus deſcenſus erit $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2).a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1).f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$. Si quidem eſt $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$ ſeu $m=\frac{n-1}{2n+2}$.

Corollarium 4.

294. Succeſſiue ergo loco m poſitis valoribus 1, 2, 3, 4, etc. ſeriei valores ſequentem conſtituent progreſſionem 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{2.4.6}{3.5.7}$, etc. in qua conceſſa circuli quadratura, termini intermedii poſſunt exhiberi. Si enim eſt $m=\frac{1}{2}$ terminus reſpondens inuenitur $\frac{\pi}{2}$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam; ſi $m=\frac{3}{2}$, erit reſpondens terminus $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$, et ita porro ſi m denotet $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. prouenient hi termini $\frac{1.3.\pi}{2.4.2}$, $\frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}$, $\frac{1.3.5.7.\pi}{2.4.6.8.2}$, etc.

Corollarium 5.

295. Innoteſcit ergo etiam in his caſibus tempus deſcenſus per AC. Nam ſi eſt $m=\frac{1}{2}$ fit $n=-\infty$, quo caſu tempus ſemper eſt infinite paruum.

Sit

Sit ergo $m=\frac{3}{2}$, fiet $n=-2$, et tempus descenſus $=\frac{1.\pi}{2.2}.\frac{a^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}\sqrt{4f}=\frac{\pi.a\sqrt{a}}{2.f}$ prorſus vt iam inuenimus (287). Sit $m=\frac{5}{2}$, erit $n=-\frac{3}{2}$ et tempus descenſus $=\frac{1.3\pi a^{\frac{5}{4}}}{2.4 f^{\frac{5}{4}}}\sqrt{2f}$. Atque ſi $m=\frac{7}{2}$, fit $n=-\frac{4}{3}$ et tempus descenſus $=\frac{1.3.5\ \pi a^{\frac{7}{6}}}{2.4.6\ f^{\frac{7}{6}}}\sqrt{3f}$.

Corollarium 6.

296. Generaliter igitur ſi fuerit $m=\frac{2k+1}{2}$, quo caſu fit $n=\frac{-k-1}{k}$, erit tempus descenſus $=$

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ 2k}.\frac{\pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{f^{\frac{2k+1}{2k}}}\sqrt{kf}.$$

PROPOSITIO 37.

Problema.

297. *Determinare tempus deſcenſus per* AC *ad virium centrum* C, *ſi vis centripeta proportionalis eſt reciproce huic diſtantiarum dignitati, cuius exponens eſt* $\frac{m-1}{m}$, *denotante* m *numerum quemcunque integrum affirmatiuum.*

So-

Solutio.

Eſt itaque $n=\frac{1-m}{m}$, et propterea $v=\frac{a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}f^{\frac{1-m}{m}}}$ $=mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})$. Elementum igitur temporis, quod eſt $\frac{dy}{\sqrt{v}}$, erit $=dy:\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}$, et tempus ipſum per PC$=\frac{1}{\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}}}\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}}$. Ponatur $a^{\frac{1}{m}}=b$ et $y^{\frac{1}{m}}=z$; erit $dy=mz^{m-1}dz$, fit igitur tempus per PC$=\sqrt{m}f^{\frac{1-m}{m}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$. At integrale ipſius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ eodem modo, quo in praecedente prop. ſumtum, eſt $2b^{\frac{2m-1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+\text{ etc. })$. Quamobrem integrum tempus deſcenſus per AC poſito $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ loco $b^{\frac{2m-1}{2}}$ erit $=2\sqrt{m}a^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}$ ducto in hanc ſeriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)}{1}\frac{(m-2)(m-3)}{2.3.7}+$ etc. Quoties igitur m eſt numerus integer affirmatiuus, toties ſeries abrumpitur, ita vt tempus quaeſitum algebraice exprimatur. Q. E. I.

Corollarium I.

298. Sit $m=1$, quo caſu fit $n=0$, et vis centripeta propterea vniformis ac grauitati aequalis; Series ergo erit $=1$, et tempus deſcenſus per AC $=2\sqrt{a}$ omnino vt iam §. 219 eſt inuentum modo neglecta littera m.

Corollarium 2.

299. Sit $m=2$, vt ſit $n=\frac{-1}{2}$; erit tempus totius deſcenſus $=\frac{2}{3}.2a^{\frac{3}{4}}f^{\frac{-1}{4}}\sqrt{2}$. Sit $m=3$, erit $n=\frac{-2}{3}$; totumque tempus deſcenſus $\frac{2.4}{3.5}2a^{\frac{5}{6}}f^{\frac{-1}{3}}\sqrt{3}$. Simili modo ſi $m=4$, et propterea $n=\frac{-3}{4}$ prodit tempus deſcenſus $=\frac{2.4.6}{3.5.7}2a^{\frac{7}{8}}f^{\frac{-3}{8}}\sqrt{4}$ etc.

Corollarium 3.

300. Generaliter igitur quicquid ſit m, ideoque $n=\frac{1-m}{m}$, erit tempus deſcenſus totius per AC $=$ $\frac{2.4.6\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots\ldots(2m-1)}2a^{\frac{2m-1}{2m}}f^{\frac{1-m}{2m}}\sqrt{m}$.

Corollarium 4.

301. Iisdem quibus ſupra (294) interpolationibus adhibitis, poterunt tempora deſcenſuum aſſignari, ſi m eſt numerus quicunque integer affirmatiuus $+\frac{1}{2}$. Sit nimirum $m=\frac{1}{2}$, quo caſu fit $n=1$, erit tempus deſcenſus $=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$, prorſus vt §. 253, vbi idem caſus, quo $n=1$ ſeu vis centripeta diſtantiis proportionalis, eſt pertractatus.

Corollarium 5.

302. Si $m=\frac{3}{4}$ ſeu $n=\frac{-1}{3}$ fit tempus deſcenſus $=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\sqrt{6a^{\frac{4}{3}}f^{\frac{-1}{3}}}$, ſi $m=\frac{5}{2}$ ſeu $n=\frac{-3}{5}$ prodit tempus deſcenſus $=\frac{1.3.\pi}{2.4.2}\sqrt{10\,a^{\frac{8}{5}}f^{\frac{-3}{5}}}$. Atque generaliter caſu quo $n=\frac{1-m}{m}$ reperitur tempus deſcenſus $=\frac{1.3\ldots\ldots(2m-2)}{2.4\ldots\ldots(2m-1)}\frac{\pi}{2}\sqrt{4ma^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}}$.

Scho-

Scholion.

303. Intelligitur ex hisce, quibus caſibus tempora deſcenſuum algebraice poſſint exprimi, videlicet, quando eſt $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$ vel $n = \frac{1-m}{m}$ et m ſignificat numerum affirmatiuum integrum quemcunque. Atque praeter hos caſus, dubito, an quisquam alius detur. Deinde etiam apparent caſus, quibus temporis definitio a circuli quadratura pendet, hique habentur ſi fuerit vel $n = \frac{-m-1}{m}$, vel $n = \frac{1-2m}{1+2m}$, denotante m vt ſupra numerum quemcunque integrum affirmatiuum. Neque vero hi ſunt omnes caſus, qui ad circuli quadraturam deducuntur; namque ſingularis caſus ſi $n = -1$ quoque a circuli quadratura pendet, vt ſequenti propoſitione demonſtrabimus. At vero hoc differt iſte caſus ab illis, quod hic in temporis expreſſione non π, ſed $\sqrt{\pi}$ occurrat; et praeterea etiam totum duntaxat deſcenſus tempus $\sqrt{\pi}$ inuoluat, dum tempus per quoduis ſpatium indefinitum nonniſi quadraturis transcendentium curuarum poteſt exhiberi.

PROPOSITIO 38.

Theorema.

304. *Exiſtente vi centripeta reciproce diſtantiis a centro virium* C *proportionali, erit tempus deſcenſus integri per* $AC = \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, *denotantibus* a *ſpatium* AC, f *diſtantiam in qua vis centripeta eſt grauitati aequalis, et* $\pi : 1$ *rationem peripheriae ad diametrum.*

Demonſtratio.

Quia in quouis puncto P altitudo celeritati debita eſt $fl\frac{a}{y}$, (266); erit ipſa celeritas $=\sqrt{fl\frac{a}{y}}$ et tempus per ſpatium PC$=\frac{1}{\sqrt{f}}\int\frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}}$. Huius ergo integrale ita acceptum vt euaneſcat facto $y=0$, dabit verum tempus per PC. Quare ſi in hac expreſſione tum ponatur $y=a$, prodibit totum deſcenſus tempus per AC. Ponatur autem $y=az$; et habebitur $\frac{a}{\sqrt{f}}\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$. Demonſtraui vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, ſi ponatur $z=1$, ſeu $y=a$, definire in hac progreſſione 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index ſit $-\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem oſtendi eſſe $=\sqrt{\pi}$. Ex quo intelligitur tempus totius deſcenſus per AC eſſe $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$. Q. E. D.

Corollarium.

305. Si ergo plura corpora ad idem centrum C ex diuerſis diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora deſcenſuum ipſis diſtantiis proportionalia.

Scholion I.

306. Neglexi in hac propoſitione fractionem $\frac{1}{250}$, quae in temporis expreſſionem, integratione ſpatii elementi per radicem quadratam altitudinis celeritati debitae diuiſi erutam, eſt multiplicanda (221), quippe quae ad tempus in minutis ſecundis inueniendum inſeruit, ſi longitudines in ſcrupulis pedis rhenani exponuntur. Simili modo etiam in ſequen-

quentibus tempora, niſi in minutis ſecundis deſiderentur, ſum definiturus, ad ambages vitandas. Facile enim apparet ad numerum minutorum ſecundorum inueniendum nil aliud eſſe faciendum, niſi vt huiusmodi temporis expreſſiones per 250 diuidantur, atque longitudines in ſcrupulis pedis Rhenani exhibeantur, vti iam ſaepius eſt inculcatum.

Scholion 2.

307. Omnino paradoxon hoc videbitur, quod integrale ipſius $\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ poſito $z=1$, fiat $=\sqrt{\pi}$. Nullo enim modo quisquam hoc directe poterit demonſtrare; neque ego hanc aequalitatem niſi a poſteriori cognoui, quemadmodum ex citata diſſertatione videre licet. Eosdem igitur reddunt valores haec duo integralia $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ et $2\sqrt{\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}}$, ſi poſt integrationem ponatur $z=1$, neque tamen ipſa ſunt inter ſe aequalia; immo nequidem inter ſe poſſunt comparari.

PROPOSITIO 39.

Theorema.

308. *Si vis centripeta fuerit vt poteſtas exponentis* n *diſtantiarum, et plura corpora ex diuerſis diſtantiis ad idem centrum delabantur, erunt descenſuum tempora poteſtatibus diſtantiarum, quarum exponens eſt* $\frac{1-n}{2}$, *proportionalia.*

Demonſtratio.

Sit corporis cuiusuis a centro C diſtantia AC $=a$, et f diſtantia, in qua vis centripeta grauitati

aequalis eſt. Deinde cum peruenerit corpus in P, ponatur $CP = y$, et altitudo celeritati in hoc loco debita $= v$, erit $v = \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$. Tempus ergo, quo CP abſoluitur eſt $= \sqrt{(n+1)} f^n \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{a+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale quanquam exhiberi non poteſt, tamen ita erit comparatum, vt a et y in ſingulis terminis $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones conſtituant, quia in differentiali eundem dimenſionum numerum efficiunt, conſiderato dy tanquam vna dimenſione. Quamobrem ſi poſt integrationem ponatur $y = a$, quo caſu tempus totius descenſus prouenit, habebit ſolum a totidem videlicet $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones, ſeu erit multiplum ipſius $a^{\frac{1-n}{2}}$. Quare, cum alter factor non complectatur niſi f et numeros, ideoque eundem valorem retineat, vtcunque a varietur, erunt diuerſorum descenſuum tempora vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ i. e. vt poteſtates diſtantiarum, quarum exponens eſt $\frac{1-n}{2}$. Q. E. D.

Corollarium I.

309. Quo igitur omnia descenſuum tempora ſint inter ſe aequalia, oportet vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ ſit quantitas conſtans, vtcunque a mutetur, id quod accidit ſi $n = 1$, ſeu vis centripeta diſtantiis directe proportionalis, vti iam obſeruauimus (283).

Co-

Corollarium 2.

310. Simili modo ex his ſtatim apparet, ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, ſeu $n = -2$, tempora deſcenſuum ad hoc centrum eſſe inter ſe vt diſtantiae eleuatae ad exponentem $\frac{3}{2}$, ſeu in ſeſquiplicata diſtantiarum ratione (287).

Corollarium 3.

311. Si fuerint plura ſimiliter attrahentia virium centra, ſed efficacia differentia, et ad ea corpora ex aequalibus diſtantiis delabantur, erunt tempora inter ſe vt $f^{\frac{n}{2}}$ quia a vt conſtans, f vero vt variabilis conſideratur. Eſt vero efficacia vt vis centripeta in data diſtantia puta 1, erit ergo f^n reciproce vt efficacia, atque tempora illa inter ſe in reciproca ſubduplicata efficaciarum ratione (285).

Corollarium 4.

312. Et, ſi ad diuerſa huiusmodi virium centra corpora ex quibuscunque diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora deſcenſuum in ratione compoſita ex directa $\frac{1-n}{2}$ plicata diſtantiarum, et reciproca ſubduplicata efficaciarum.

Scholion.

313. Ex his, quae de viribus centripetis dicta ſunt, abunde perſpicitur, quomodo motus corporum inueniri oporteat, ſi loco vis centripetae vis centrifuga ſeu pellens corpus de centro ſubſtituatur. Omnia enim manent, vt in praecedentibus, niſi quod loco formulae vim centripetam exprimen-

tis,

tis, quae erat $\frac{y^n}{f^n}$ (264), eius negatiua debeat adhiberi. Neque tamen ſuperfluum iudico de his caſibus quaedam afferre; cognoſcentur enim ex his generales quaedam regulae ad motus generationem a potentiis pertinentes, quae ex ſolo calculo non poſſunt deduci. Reſpiciunt ea autem actionem potentiarum in corpora quieſcentia, ad quae calculus noſter, quippe quo ponitur celeritatis incrementum reſpectu prioris infinite paruum, minus recte accommodatur, et reipſa abſurdi quid praebet, niſi primum ſpatii elementum tempuſculo infinite paruo percurritur. Ad hoc autem dilucidandum hoc vtor axiomate, quod corpus in ipſo centro virium repellente poſitum perpetuo ibi ſit permanſurum, ſi vis centrifuga in ipſo illo puncto fuerit infinite parua ſeu nulla; id quod euenit, quando exponens dignitatis diſtantiarum, cui vis centrifuga eſt proportionalis, eſt numerus nihilo maior ſeu poſitiuus.

PROPOSITIO 40.
Problema.

Tab. III. 314. *E centro virium* C *a ſe repellente in ratione* n *plicata diſtantiarum, egrediatur corpus in recta* CP, *requiritur eius celeritas in loco quouis P et*
Fig. 2. *tempus, quo ſpatium* CP *percurritur.*

Solutio.

Sit f diſtantia, in qua vis centrifuga aequalis eſt grauitati, et vocetur CP, y, atque altitudo cele-

leritati in P debita v. Erit ergo vis, qua corpus in P vrgetur $= \frac{y^n}{f^n}$, et propterea $dv = \frac{y^n dy}{f^n}$ (213), quia corpus motu accelerato propellitur. Quare, cum corpus in C celeritatem nullam habere ponatur, erit $v = \frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$, ſi fuerit $n+1$ numerus poſitiuus, ſin autem negatiuus, fiet v infinitum. Ex hoc prodit tempus, quo ſpatium CP percurritur, $= \sqrt{(n+1)}f^n \int dy : y^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)}f^n y^{1-n}$ ſi quidem y^{1-n} fit $=o$, poſito $y=o$. Nam ſi fuerit infinitum, tempus quoque prodiret infinitum, ob addendam conſtantem infinite magnam; id quod indicio eſſet corpus nunquam ex C egreſſurum. Tempus igitur erit $= \frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)}f^n y^{1-n}$, quoties et $1-n$ et $n+1$ fuerint numeri poſitiui. Q. E. I.

Corollarium 1.

315. Sunt vero hi ambo numeri $1-n$, et $1+n$ affirmatiui, ſi n contineatur intra hos limites -1 et $+1$. Atque ſi n illum terminum -1 transcendit celeritas vbique erit infinita; et ſi hunc $+1$ transgreditur, tempus erit infinitum.

Corollarium 2.

316. Conſtat autem ex ipſa rei natura, ſi n fuerit numerus nihilo maior, corpus nunquam ex C eſſe egreſſurum (313). Hanc ob rem neceſſe eſt, etſi n contineatur intra o et $+1$, calculum hic adhibitum, quippe qui tempus indicat finitum, fallere.

Corollarium 3.

317. Tempora haec autem ſequuntur ex celeritatibus, ergo et in his ipſis abſurdum ineſſe debebit, quoties n comprehenditur intra o et $+1$. Neque enim hae celeritates generari poterunt, cum corpus nunquam ex C egrediatur.

Scholion 1.

318. Sit curua AM talis, vt denotantibus abſciſſis $AP = y$, applicata PM ſit $= v$. Haec curua contento n intra hos limites o et $+1$, hanc habebit proprietatem, vt ipſa in A cum axe confundatur, hocque loco curuedinem habeat infiniter magnam nempe radium oſculi euaneſcentem.

Corollarium 4.

319. Quoties igitur accidit, vt ſcala celeritatum, ſeu potius altitudinum celeritatibus debitarum huiusmodi habeat formam, toties iudicandum eſt, eam a nulla potentia generari potuiſſe, etiamſi calculus aliter oſtendat, ſed eſſe caſum penitus imaginarium ac in rerum natura non exiſtentem.

Scholion 2.

320. Ratio huius aberrationis calculi a natura in ipſo principio motus ſine dubio eſt ſita, atque hoc loco lex alias vniuerſalis de celeritatis incremento a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim, vt iam animaduertimus (313) haec lex locum habet tantum, quando corpus finitam iam habet celeritatem, ſemper in principio motus

tus temere vſurpatur. Cum autem iſte error in ipſo primo tantum elemento inſit, plerumque eſt infinite paruus et hanc ob rem non eſt reſpiciendus. Eſt vero infinite paruus, quoties primum elementum ſpatii tempuſculo infinite paruo percurritur, tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus conſiderabile diſcrimen poterit producere. Euenit hoc, ſi potentia, qua corpus in ipſo principio motus ſollicitatur eſt finitae magnitudinis vel etiam infinitae magnae; perſpicuum enim eſt hoc caſu, primum elementum temporis puncto percurri. At ſi potentia, vt in noſtro caſu vſu venit, in principio eſt infinite parua ſeu potius nulla, ad primum tantum elementum abſoluendum non modo finito, ſed etiam infinito opus eſt tempore, quia corpus quieſcens a nulla potentia pulſum de loco ſuo nunquam excedet. In reliquis quidem caſibus, quibus n eſt nonſolum nihilo, ſed etiam vnitate maior, tantus eſt error, vt etiam calculus infinitum tempus per primum elementum oſtendat. Verum, ſi n intra o et 1 comprehenditur, vitium calculi animaduertitur; Tab. III. Fig. 4.
hocque ideo, vti videtur, quia his caſibus ſcala potentiarum formam habet curuae AM, quae axi AP in A ad angulos rectos occurrit. Statim enim in proximo ipſi A puncto a linea ab potentiam exprimens infinite maior eſt ſagitta Aa; perinde autem eſt in motus computatione, ſiue corpus elementum percurrens conſideretur a potentia, quae initio agit, ſollicitatum ſiue ea, qua in fine elementi vrgetur. In hoc autem caſu euidens eſt, errorem

naſci oportere, ſi corpus per totum elementum A*a* a potentia *ab* ſollicitatum conſideretur.

PROPOSITIO 41.

Problema.

Tab. III. Fig. 5.

321. *Si fuerit vis centripeta functioni cuicunque diſtantiarum a centro* C *proportionalis, corpusque ex* A *ad id delabatur; requiritur celeritas eius in puncto quocunque* P *atque tempus, quo ſpatium* AP *percurritur.*

Solutio.

Repraeſentet curua BMD ſcalam potentiarum ſeu legem vis centripetae, ita vt corpus in P trahatur ad C a potentia PM, quae ſit ad vim grauitatis vt haec PM ad rectam conſtantem AE, qua vis grauitatis exprimitur. Sit nunc $AP=x$; $PM=p$; $AE=1$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Vis igitur accelerans eſt p, et propterea ſumto elemento $Pp=dx$, erit $dv=pdx$ (213). Ex qua prodit integrando $v=\int pdx$. At $\int pdx$ exprimit aream ABMP, hanc ob rem habebitur $v=\frac{ABMP}{AE}$, completa homogeneitate recta $AE=1$. Cognita nunc altitudine v erit tempus, quo ſpatium AP percurritur $=\int\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, quod, quia p per x dari ponitur, per quadraturas innoteſcit. Q. E. I.

Corollarium 1.

322. Perſpicitur ex his, ſi corpus ea celeritate, quam in C acquiſiuit, retro moueatur ſurſum, motum eius aſcenſus ſimilem fore deſcenſui, atque in

in puncto P eandem habiturum eſſe celeritatem, quam habuit ante, et proinde tempus quoque aſcenſus per CP aequale eſſe debere, tempori deſcenſus per idem ſpatium.

Corollarium 2.

323. Poſuimus hic corpus in A celeritatem habere nullam, atque ex quiete motum inchoare. Sed non difficilior euadit calculus, ſi ei in A celeritas quaecunque tribuatur; hoc enim caſu differentiale pdx ita debet integrari, vt facto $x=o$, ipſum $\int pdx$ praebeat altitudinem celeritati initiali debitam. Tempus vero ex $\int pdx$ hac ratione accepto inuenietur ſimiliter vt ſupra.

Scholion I.

324. Aſſumſimus quidem p eſſe functionem ipſius x, et propterea non reſpicere centrum virium C, ſed tantum motus initium A. Nihilo tamen minus caſus propoſitionis in ſolutione continetur; ſi enim p eſt functio ipſius diſtantiae CP a centro virium C, quam vocemus y, erit $y=a-x$, poſito toto ſpatio $AC=a$, et hanc ob rem p denotabit functionem ipſius $a-x$, i. e. functionem ipſius x et conſtantium vt aſſumſimus. Noſtra vero ſolutio latius patet, determinat enim motum corporis a quacunque potentia ſollicitati, nullo reſpectu ad certum aliquod punctum fixum habito, dummodo hae potentiae vbiuis eandem directionem teneant. Niſi enim hoc fiat, corpus ceſſabit in linea recta moueri, ſed in curua incedet, de quo motu in ſequentibus tractabimus.

Scholion 2.

325. Determinauimus hactenus motus corporis rectilineos ex data potentia, nunc vero pertractanda reſtat altera huius capitis pars, qua ex data motus conditione potentiarum legem definiri oportet. Sit vero hoc vel ex datis celeritatibus vel temporibus, vtrumque autem duplici modo eſt pertractandum. Vel enim reſpicitur ad vnicum deſcenſum ſeu aſcenſum, in cuius ſingulis punctis datae ponuntur vel celeritates vel tempora, quibus quaeque ſpatii portiones percurruntur. Vel conſiderantur infiniti deſcenſus ad punctum fixum ex diuerſis altitudinibus facti, in quibus dantur vel celeritates vltimae, vel tempora, quibus ſinguli deſcenſus integri abſoluuntur. Ex his igitur quatuor oriuntur problemata primaria, quorum ſolutiones hic exhiberi oportet. Praeter haec vero aliae afferuntur quaeſtiones, in quibus neque ſolae celeritates neque ſola tempora dantur, ſed aliud quiddam, quod ex vtrisque ſit compoſitum, cuiusmodi vero quaeſtiones, cum innumerabiles poſſent excogitari, aliquas tantum magis inſignes, et ex quarum ſolutionibus ſimul reliquorum ſolutiones poſſint intelligi, in medium proferemus.

PROPOSITIO 42.

Problema.

Tab. II. Fig. 10. 326 *Data corporis rectam* AP *percurrentis in ſingulis punctis celeritate; requiritur potentiae lex, quae hunc motum corpus ſollicitando efficere valet.*

So-

Solutio.

Percurſo quouis ſpatio AP, quod ponimus $=x$, ſit altitudo celeritati, quam corpus in P habet, debita $=v$, quae proinde data et ipſius x et conſtantium functio quaedam eſſe ponitur. Potentia vero in P agens, quam quaerimus, ſit $=p$, quae ergo ex corporis acceleratione dv, dum elementum $Pp=dx$ percurrit, inueniri poterit. Cum enim ſit $dv=pdx$ (213), erit $p=\frac{dv}{dx}$ ſeu iſta potentia quaeſita ſe habebit ad vim grauitatis, vt incrementum altitudinis celeritati debitae, ad ſpatii elementum, quod interea percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

327. Si fuerit $v=x$, ſeu ſpatium deſcriptum ea ipſa altitudo celeritati debita; fiet $dv=dx$ et $p=1$, id quod indicat potentiam hunc motum producentem eſſe vniformen, et ipſi grauitati aequalem.

Corollarium 2.

328. Si ipſae celeritates ponantur ſpatiis percurſis proportionales; erit $v=\frac{x^2}{f}$, denotante f conſtantem requiſitam, fit ergo $dv=\frac{2xdx}{f}$ et $p=\frac{2x}{f}$. Quamobrem potentia erit ſpatiis percurſis proportionalis.

Scholion 1.

329. Conſtat autem ex ſuperioribus, hunc caſum exiſtere non poſſe; nam quia potentia in ipſo motus initio A eſt nulla, corpus ex hoc puncto nun-

nunquam egreditur, ſed ibi perpetuo quieſcet. Idem commonſtrat temporis per AP computatio, quod erit $=\int\frac{dx}{x}\sqrt{f}$, quae quantitas eſt infinita, ſi quidem integrale ita accipitur, vt euaneſcat poſito $x=o$.

Corollarium 3.

330. Quo igitur hoc non eueniat, oportet vt $\frac{dv}{dx}$ ſit eiusmodi quantitas, quae facto $v=o$ non euaneſcat, ſed quae vel fiat finita vel infinita. Ex quo perſpicitur ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum AM, in qua ſumtis $AP=v$, applicatae PM repraeſentent has altitudines v, non debere in A in axem incidere, ſed angulum cum eo finitum conſtituere oportere.

Tab. III. Fig. 2.

Scholion 2.

331. Haec intelligenda ſunt tantum de iis caſibus, quibus corporis celeritas in A euaneſcens ponitur, et ſcala AM cum axe in A concurrit. Aliter enim ſe res habet, ſi corpus in A celeritatem iam habet, qua, etiamſi potentia ſit nulla, tamen ex A progredi, potentiaeque actionem ſubire poteſt, ita vt non opus ſit tempore infinito ad ſpatium AP abſoluendum.

PROPOSITIO 43.

Problema.

Tab. III. Fig. 5.

332. *Dato tempore, quo corpus in recta* AC *progrediens, percurrit ſingula ſpatia* AP; *oportet definire legem potentiarum, qua efficitur, vt corpus hoc motu feratur.*

So-

Solutio.

Dicto ſpatio AP, x; et tempore, quo percurritur $=\sqrt{t}$, quia expreſſionis temporis quadratum vnicam habet dimenſionem; ſit potentia quaeſita $=p$, et altitudo celeritati in P debita $=v$, hac enim opus eſt ad inueniendum p, quamuis ex calculo exire debeat. His poſitis erit vt ante $dv=pdx$, et $v=\int pdx$. Tempus igitur $\sqrt{t}=\int\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, ex qua aequatione ſumtis differentialibus prodit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$ et $\int pdx=\frac{4tdx^2}{dt^2}$, cuius ſi denuo ſumatur differentialis poſito dx conſtante, habebitur $p=\frac{4dx}{dt}-\frac{4tdxddt}{dt^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

333. Si ponatur tempus ipſum $=$T neglecta homogeneitate, erit $t=\mathrm{T}^2$; atque prodibit $p=\frac{-2dxdd\mathrm{T}}{d\mathrm{T}^3}$. Quae expreſſio ſimplicior eſt ſuperiore, et facilius ad caſus ſpeciales accommodatur.

Corollarium 2.

334. Si tempora ponantur ſpatiis deſcriptis proportionalia, erit $\mathrm{T}=x$ et $dd\mathrm{T}=o$, ob dx conſtans. Conſequenter potentia erit nulla, qua indicatur corpus vi inſita hunc motum aequabilem continuare.

Scholion.

335. Notandum hic eſt pro T eiusmodi accipi debere functionem ipſius x, quae cum fiat $=o$, poſito $x=o$, tum creſcentibus x creſcat quoque.

Fieri enim omnino non poteſt, vt corpus moueri pergat, tempus vero diminuatur. Ponamus v. g. $T = \sqrt{(2ax - x^2)}$ quae quantitas ad certum tantum terminum creſcit, creſcente x, tum vero decreſcit. Erit ergo $dT = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ddT = \frac{-a^2 dx^2}{(2ax - x^2)^{3:2}}$. Ex his fit $p = \frac{2a^2}{(a-x)^3}$, ſeu poſita $AC = a$, ſollicitabitur corpus in P ad C vi cubo diſtantiae a C reciproce proportionali. Tempus vero $\sqrt{(2ax - x^2)}$ vlterius non valet, quam vsque ad C quo $x = a$. Sed de hoc caſu iam eſt actum (289). Quare ex hoc concludi videtur corpus cum in C peruenerit ex eo nunquam eſſe egreſſurum, quod autem quomodo fieri poſſit, cum celeritas eius in C ſit infinite magna, nullo modo concipi poteſt. Accedit quod, cum ſit $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT} = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x}$, celeritas corporis cum vltra C progrediatur, deberet eſſe negatiua, ideoque corpus a C non recederet, ſed ad C accederet, quae ita pugnant, vt etiam nunc conciliari nequeant.

Corollarium 3.

336. Cum ſit elementum temporis $dT = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit celeritas corporis in quouis loco $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT}$, ex data ergo temporum lege, ſimul celeritas corporis in ſingulis locis innoteſcit; quod quidem ex ipſo nexu inter celeritates et tempore conſequitur, nullo reſpectu habito ad potentiam (37).

PRO-

PROPOSITIO 44.

Problema.

337. *Si corpus in recta* AP *ita deſcendat, vt ea celeritate, quam in* P *habet, eodem tempore, quo ſpatium* AP *percurrit, progredi poſſit motu vniformi per ſpatium* PM, *applicatam curuae* AM *datae: determinari oportet legem potentiae ſollicitantis, qua talis motus generatur.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Poſito $AP = x$ et $PM = s$, erit s ob datam curuam AM functio ipſius x. Sit porro potentia in P corpus ſollicitans $= p$, altitudo celeritati in P debita $= v$, et tempus, quo ſpatium AP abſoluitur $= T$, Quia iam ſpatium s tempore T celeritate $\surd v$ abſoluitur motu aequabili, erit $T = \frac{s}{\surd v}$ (30). Eſt vero $v = \int p\,dx$ et $T = \int \frac{dx}{\surd \int p\,dx}$, quocirca habebitur $\int \frac{dx}{\surd \int p\,dx} = \frac{s}{\surd \int p\,dx}$, vel relicto v loco $\int p\,dx$, quo calculus concinnior reddatur, erit $\int \frac{dx}{\surd v} = \frac{s}{\surd v}$. Quae differentiata dat $\frac{dx}{\surd v} = \frac{ds}{\surd v} - \frac{s\,dv}{2v\surd v}$, ex qua deducitur haec aequatio $\frac{dv}{v} = \frac{2ds}{s} - \frac{2dx}{s}$; cuius integralis eſt $lv = 2ls - 2\int \frac{dx}{s}$, ſeu $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$ denotante e numerum, cuius logarithmus eſt 1. Sumantur iterum differentialia, prodibit $dv = p\,dx = 2e^{-2\int \frac{dx}{s}}(s\,ds - s\,dx)$. Ex qua tandem elicitur $p = 2se^{-2\int \frac{dx}{s}}\left(\frac{ds - dx}{dx}\right)$. Innoteſcet igitur potentia quaeſita p ex iſta aequatione, quia s in x dari ponitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

338. Quia eſt $v = e^{-2\int\frac{dx}{s}} s^2$, habebitur hinc ipſa corporis, quam in P habet, celeritas $\sqrt{v} = e^{-\int\frac{dx}{s}} s$. Quam autem conſtantem in integratione ipſius $\frac{dx}{s}$ addi oporteat, mox docebitur.

Corollarium 2.

339. Tempus quoque T, quo ſpatium AP percurritur, facile ex hiſce deducitur. Nam cum ſit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$, habebitur $T = e^{\int\frac{dx}{s}}$. Cum igitur debeat T euaneſcere facto $x = o$, oportet ipſum $\frac{dx}{s}$ ita integrari, vt $e^{\int\frac{dx}{s}}$ euaneſcat, facto $x = o$. Quamobrem neceſſe eſt vt fiat $\int\frac{dx}{s} = -\infty$, ſi ponatur $x = o$.

Corollarium 3.

340. Sit $s = nx$, erit $\int\frac{dx}{s} = \frac{1}{n} lx + lc$. Quicquid igitur c denotet, ſemper $\int\frac{dx}{s}$ fit $= -\infty$ poſito $x = o$. Quare erit $e^{\int\frac{dx}{s}} = cx^{\frac{1}{n}} = T$. Conſequenter prodibit $p = \frac{2n(n-1)}{c^2} x^{\frac{n-2}{n}}$, atque $\sqrt{v} = \frac{n}{c} x^{\frac{n-1}{n}}$.

Corollarium 4.

341. Si ponatur $s = x$, perſpicuum eſt motum in AP vniformem eſſe debere, id quod etiam calculus oſtendit. Fit enim $n = 1$, adeoque $p = o$ et $\sqrt{v} = \frac{n}{c}$ ſeu conſtanti.

Co-

Corollarium 5.

342. Si n eſt vnitate minor, celeritas in ipſo puncto A fit infinite magna, atque etiam potentia p, erit enim reciproce vt poteſtas exponentis $\frac{2-n}{n}$ ſpatiorum percurſorum.

Corollarium 6.

343. Si n eſt vnitate maior, attamen binario minor, fit quidem celeritas in A$=o$, ſed potentia manet in A infinite magna, decreſcitque in ratione quadam multiplicata ſpatiorum percurſorum.

Corollarium 7.

344. Si $n=2$, habemus caſum potentiae vniformis. Fit enim $p=\frac{4}{c^2}$, et $\sqrt{v}=\frac{2}{c}\sqrt{x}$. Hancque proprietatem iam demonſtrauimus propoſitione 28, (230) vbi oſtendimus corpus in hac potentiae vniformis hypotheſi ex quiete deſcendens tantam quouis ſpatio percurſo acquirere celeritatem, qua eodem tempore vniformiter poſſet duplum ſpatium percurrere.

Corollarium 8.

345. Sin vero n binarium excedat, prodeunt ii caſus, quos diximus (316) in rerum natura locum obtinere non poſſe, quamuis calculus aliter oſtendat. Fit enim celeritas in A nulla, ibidemque potentia ſollicitans euaneſcit, quamobrem corpus nunquam ex A exire poterit, non obſtante calculo, qui tempus T per ſpatium quoduis AP, exhibet finitum.

Scholion.

346. Huius propoſitionis caſus eſt ergo eiusmodi, vt data motus conditio ſit ex celeritate et tempore permixta, ex qua legem potentiarum erui oporteat. Plura vero huiusmodi exempla afferre ſuperuacaneum foret, cum ex hoc vno omnium reliquorum ſoluendorum modus perſpiciatur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tab. III. Fig. 7. 347. *Datis celeritatibus, quas corpus ex quibuscunque diſtantiis ad centrum virium C accedens in ipſo centro C acquirit, definire legem vis centripetae huiusmodi deſcenſus producentis, poſito quod corpus ſingulos deſcenſus ex quiete incipiat.*

Solutio.

Repraeſentet CM ſcalam altitudinum celeritatibus, quas corpus in puncto C acquirit, debitarum, ita vt PM ſit ipſa altitudo debita celeritati, quam corpus ex P deſcenſum inchoans in C adipiscitur. Curua vero DN ſit ſcala potentiarum qraeſita, cuius ſcilicet applicatae PN exhibeant vim centripetam corpus in punctis P ſollicitantem; linea vero CB deſignet vim centripetam vi grauitatis aequalem. His poſitis atque corpore ex P in C deſcendente erit altitudo celeritati eius in C debita aequalis areae CDNP applicatae ad BC (321). Quamobrem erit $PM = \frac{CDNP}{BC}$. Vocentur nunc CP, y; PM, v; et PN, p;

p; poſitoque BC$=1$; erit $v=\int pdy$, et differentiando $dv=pdy$. Quare cum detur v in y erit $p=\frac{dv}{dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

348. Sint celeritates in C acquiſitae, vt ſpatia percurſa erit Vv vt y, et conſequenter p vt y. Vis centripeta igitur proportionalis eſt diſtantiis a centro C.

Corollarium 2.

349. Si celeritates in C acquiſitae dignitati exponentis n diſtantiarum a centro C proportionales ponantur, erit v vt y^{2n}; ergo p vt y^{2n-1}. Potentia igitur ſeu vis centripeta diſtantiarum dignitati $2n-1$ eſt proportionalis.

Corollarium 3.

350. Quia celeritas in C acquiſita, cum fuerit $y=0$, debet eſſe quoque $=0$, et praeterea maiori diſtantiae y maior celeritas reſpondere debeat; non poterit non n numerum affirmatiuum ſignificare.

Corollarium 4.

351. Potentia autem p erit conſtans, cum ſit $n=\frac{1}{2}$; quo numero ſi n fuerit minor, erit vis centripeta reciproce vt dignitas quaedam diſtantiarum a centro C. Sin n fuerit $>\frac{1}{2}$ erit p directe vt huiusmodi dignitas quaedam. In illo caſu ergo vis centripeta in C erit infinite magna, et decreſcet creſcentibus diſtantiis; hoc vero caſu erit in C$=0$, creſcetque creſcentibus diſtantiis.

Co-

Corollarium 5.

352. Cum ſit $PM = \frac{CDNP}{CB}$, perſpicuum eſt curuam CM eſſe etiam ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum, cum corpus ex C egrediatur in recta CP, vi centripeta in centrifugam mutata, atque motum a quiete incipiat (321).

Scholion.

353. Quanquam autem hoc modo problema reductum ſit ad prop. 42 (326) transmutata vi centripeta in centrifugam; tempus tamen aſcenſus per CP in caſu vis centrifugae non erit aequale tempori deſcenſus per PC in caſu vis centripetae. Neque enim aequalitas celeritatum, quae in vtroque caſu per aequalia ſpatia generantur, temporum aequalitatem inducit; ſed ex ipſo etiam intuitu contrarium apparet. Nam quoties vis centripeta in C eſt $=o$, etiam vis centrifuga in C euaneſcit; quamobrem tempus aſcenſus per CP erit infinitum (313), cum tamen deſcenſus abſoluatur tempore finito. Nullum igitur adminiculum ex iſta ſimilitudine celeritatum ad ſolutionem ſequentis problematis ſuppeditatur. In ſequenti autem propoſitione dari ponuntur tempora, quibus ſinguli deſcenſus abſoluuntur, eaque nonſolum eſt difficillima ſolutu, ſed ex ſcala temporum nequidem ſcala potentiarum vllo modo poteſt conſtrui. Quocirca non niſi caſus particulares in hac propoſitione complectemur, quorum ſolutio vires noſtras non ſuperat.

PRO-

PROPOSITIO 46.
Problema.

354. *Si fuerint tempora, quibus corpus ex quibuscunque diſtantiis* PC *ad centrum virium* C *perueniat, in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum; definire legem vis centripetae.* Tab. III. Fig. 8.

Solutio.

Sint iſta tempora vt poteſtates diſtantiarum exponentis n, ſitque curua DN ſcala vis centripetae quaeſita, ita vt applicata $\pi\nu$ exponat potentiam, qua corpus in π exiſtens ad C vrgetur, repraeſentante CB vim grauitatis. His poſitis descendat corpus ex puncto quocunque P et ponatur diſtantia $PC = a$, erit ergo tempus deſcenſus per PC vt a^n, quamobrem id ponamus $= Ca^n$, denotante C quantitatem conſtantem, in qua a non inſit, quia a ob punctum P variabile reipſa eſt quantitas variabilis. Peruenerit nunc corpus in locum quemcunque π et vocetur $C\pi = x$, erit altitudo celeritati eius in hoc loco debita $= \frac{PN\nu\pi}{BC} = \frac{CPND - C\pi\nu D}{BC}$ (321). Ponatur autem area $CPND = A$, et area $C\pi\nu D = X$, atque $BC = 1$; erit ergo altitudo celeritatis in π debita $= A - X$, et ipſa celeritas $= \sqrt{(A - X)}$. Notandum hic autem eſt, X eſſe functionem quandam ipſius x et conſtantium in qua non ſit a, area enim $C\pi\nu D$ non pendet a puncto P, ſed retinet eundem valorem vbicunque accipiatur punctum P, dummodo diſtantia $C\pi$ maneat eadem. Qualis autem X eſt functio ipſius x, talis etiam eſſe debebit A functio ipſius a, abeunte

enim x in a, functio X transmutabitur in A. Iam tempus, quo hoc deſcenſu ſpatium $C\pi$ percurritur erit $=\int\frac{dx}{\surd(A-X)}$, quod integrale ita debet eſſe ſumtum vt facto $x=o$, ipſum euaneſcat. Ex hac igitur expreſſione habebitur integrum tempus deſcenſus per PC ſi ponatur $x=a$, quo caſu X quoque transmutatur in A. Quia autem haec reſultans quantitas ita debet eſſe comparata, vt in ea a habeat n dimenſiones; (oportet enim eam aequalem eſſe ipſi Ca^n), in indefinito integrali $\int\frac{dx}{\surd(A-X)}$ a et x ſimul habeant neceſſe eſt vbique n dimenſiones. Quamobrem etiam formula differentialis $\frac{dx}{\surd(A-X)}$ n habebit dimenſiones, dimenſionemque vnam conſtituere exiſtimanda ſunt tam a et x quam dx. Perſpicuum igitur eſt in $\surd(A-X)$ $1-n$ ineſſe debere dimenſiones, atque in A—X, $2-2n$ dimenſiones ipſarum a et x. Sed quia in X non ineſt a, debebit X functio eſſe $2-2n$ dimenſionum ſolius x, aliud ergo X eſſe non poterit niſi bx^{2-2n}, et propterea erit $A=ba^{2-2n}$. Conſtans quidem quantitas ad bx^{2-2n} adiici poteſt, cum ea, quia ad ba^{2-2n} pariter eſt addenda, ex A—X iterum excedat. Nam ſi ponatur $X=bx^{2-2n}+bc^{2-2n}$, erit $A=ba^{2-2n}+bc^{2-2n}$ et idcirco $A-X=b(a^{2-2n}-x^{2-2n})$. Sed quia X denotat aream $C\pi\nu D$, euaneſcere debet facto $x=o$, quamobrem, ſi eſt $2-2n$ numerus poſitiuus, ſemper debet eſſe $bc^{2-2n}=o$, at ſi $2-2n$ euadet numerus negatiuus quantitas bc^{2-2n} deſignabit quantitatem infinitam negatiuam. Quicquid igitur ſit bc^{2-2n} debet eſſe $-bo^{2-2n}$, hoc enim ſi $2-2n$ ſeu $1-n$ eſt numerus af-

fir-

firmatiuus ſponte euaneſcit, et ſi $1-n$ eſt negatiuum praebet infinitum requiſitum. Sed cum ſit propoſitum legem vis centripetae inuenire, nihil refert ſiue haec quantitas conſtans ſit $=o$ ſiue infinita. Namque poſita vi centripeta in $\pi=p=\pi\nu$, erit area $C\pi\nu D=\int pdx$. Quamobrem habebitur $bx^{2-2n}+bc^{2-2n}=\int pdx$, et ſumtis differentialibus prodibit $p=(2-2n)bx^{1-2n}$. Conſequenter vis centripeta debet eſſe in $1-2n$ *plicata* ratione diſtantiarum. Q. E. I.

Corollarium 1.

355. Quo igitur omnes deſcenſus ad centrum C ſint iſochroni, ſeu abſoluantur aequalibus temporibus, poni debet $n=o$, quo facto prouenit vis centripeta diſtantiis directe proportionalis. Iam quidem animaduertimus hoc caſu omnes deſcenſus ad centrum eſſe iſochronos (283).

Corollarium 2.

356. Si ponatur $n=1$, vt tempora deſcenſuum ſint ſpatiis percurſis proportionalia; inuenitur vis centripeta diſtantiis reciproce proportionalis.

Corollarium 3.

357. Si $n=\frac{1}{2}$ ſeu tempora in ratione ſubduplicata diſtantiarum, vis centripeta habetur conſtans, quam proprietatem iam ſupra eruimus (217). Si ergo $n>\frac{1}{2}$ vis centripeta creſcente diſtantia decreſcet, ſin $n<\frac{1}{2}$ creſcet creſcente diſtantia.

Scholion.

358. Hae quidem proprietates omnes conſequuntur ex propoſitione 39, (308), vbi demonſtrauimus, ſi vis centripeta fuerit vt poteſtas exponentis n diſtantiarum, tempora deſcenſuum fore in ratione $\frac{1-n}{2}$ *plicata* diſtantiarum. Quae propoſitio egregie cum hac noſtra conſpirat, poſito enim n loco $\frac{1-n}{2}$ prodibit $1-2n$ loco n. Neque tamen me hac propoſitione acta egiſſe putandum eſt, nam hic a priori modo analytico ex data temporum conditione legem vis centripetae erui, cum ibi inuerſo ordine, ad idem fuerim perductus. Neque praeterea ante certum erat, praeter has inuentas virium centripetarum leges alias non ſatisfacere. Ipſa vero ſolutio incredibilem in poſterum praeſtat vtilitatem. Nam quia mere eſt analytica et peculiarem a nemine adhuc adhibitam methodum complectitur, ad plurima alia problemata ſoluenda deducere poteſt, quae aliis methodis fruſtra tentantur. Ita cum huiusmodi methodus adhuc incognitus eſſet, neque hi iſochroni deſcenſus, neque curua tautochrona a priori ſunt inuenta, ſed examinantes vel vim centripetam diſtantiis proportionalem vel curuam cycloidem inopinato in iſtas proprietates inciderunt Geometrae.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. III. Fig. 9. 359. *Data ſcala potentiarum* BND, *quibus corpus per ſpatium* AC *deſcendens ſollicitatur, inuenire in-*

innumerabiles alias vt $\beta\nu\delta$, quibus corpus ſollicitatum in C eandem acquirit celeritatem, poſito corpore ſemper in A motum ex quiete incboante.

Solutio.

Cum pro ſcala potentiarum BND altitudo celeritati, quam corpus in C habebit, aequalis ſit areae $\frac{ABCD}{CE}$ exponente CE vim grauitatis (321) et pro ſcala $\beta\nu\delta$ iſta altitudo $= \frac{A\beta\delta C}{CE}$ (cit.); debebit eſſe $ABDC = A\beta\delta C$, quam proprietatem vtique infinitae curuae habere poſſunt. In quocunque quidem ſpatii AC puncto P haec proprietas locum habere nequit, vt eſſet $ABNP = A\beta\nu P$, niſi curua $\beta\nu\delta$ incidat in alteram BND. Erit ergo diſcrimen quoddam inter has areas quod vocemus Z ita vt ſit $A\beta\nu P = ABNP - Z$, quae differentia Z ita debet eſſe comparata vt euaneſcat puncto P tam in A incidente quam in C. Hanc ob rem conſtructa ſuper axe AC curua quacunque AMC, quae in punctis A et C cum axe occurrat, poterit eius applicata PM loco huius Z vſurpari; euaneſcit enim puncto P et in A et C translato. Quo autem ex eadem curua AMC innumerabiles curuae $\beta\nu\delta$ deduci queant, expedit functionem quandam ipſius applicatae PM loco D adhibere quam ipſam. Haec vero functio hanc habere debebit proprietatem, vt fiat $= o$, ſi euaneſcit PM. His iam ita inſtitutis ponatur $AC = a$, $AP = x$, $PN = y$, $P\nu = Y$, et $PM = z$, quarum quantitatum a, x, y et z, nec non Z functio ipſius z tanquam datae conſiderari poſſunt, incognita vero quantitas erit Y, quae ex

hac aequatione $\int Y dx = \int y dx - Z$ definietur. Sumtis enim differentialibus prodit $Y = y - \frac{dZ}{dx}$, ex qua aequatione curua $\beta\nu\delta$ conſtrui poterit. Q. E. I.

Corollarium 1.

360. Sit $Z = nz^2$, erit $dZ = 2nzdz$ et $Y = y - \frac{2nzdz}{dx}$. At $\frac{zdz}{dx}$ denotat ſubnormalem in curua AMC ducta normali MR in puncto M. Si itaque accipiatur $N\nu$, quae linea eſt $= y - Y$, aequalis cuicunque multiplo ſubnormalis PR, curua $\beta\nu\delta$ quaeſito ſatisfaciet.

Corollarium 2.

361. Poſſumus etiam ponere $dZ = pzdz$ denotante p functionem quamcunque ipſius z. Hic enim non opus habemus ad hoc reſpicere quod Z euaneſcere debeat, poſito $z = o$. Nam quaecunque functio loco p accipiatur, integrale ipſius $pzdz$ ſemper ita poteſt accipi vt fiat $= o$ poſito $z = o$. Hanc ob rem habebimus $Y = y - \frac{pzdz}{dx} = y - p.$ PR. ſeu $N\nu = p.$ PR. quae conſtructio latiſſime patet.

Scholion.

362. Notandum hic eſt non neceſſe eſſe, vt loco curuarum BND et AMC curuae regulares, quae aequationibus certis contineantur, adhibeantur. Sed ad conſtruendas curuas $\beta\nu\delta$ ſufficit curuas etiam vel maxime irregulares nulla aequatione contentas accipere. Pariter enim conſtructio determinandis ſubnormalibus ſuccedit.

PRO-

PROPOSITIO 48.

Problema.

363. *Data ſcala potentiarum* BND, *quibus corpus ſpatium* AC *percurrens ſollicitatur, inuenire innumerabiles alias vt* ϐνδ, *quibus efficiatur vt corpus eodem tempore ſpatium* AC *abſoluat.*

Solutio.

Sumto quocunque ſpatio AP, ſit tempus, quo hoc abſoluitur vrgente ſcala potentiarum BND, $=t$ et tempus, quo idem ſpatium agente ſcala ϐνδ abſoluitur, ſit $=$T, ponaturque $T=t+Z$, quae quantitas Z euaneſcat, puncto P tam in A quam in C tranſlato. Hanc ob rem vt ante facio Z functionem applicatae PM curuae AMC in A et C cum axe AC occurrentis, talem, vt euaneſcat facto $PM=z=0$. Dicantur nunc AP, x, PN, y et Pν, Y, et erit $t=\int\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}$; atque $T=\int\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}$, quocirca hanc habebimus aequationem $\int\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}+Z$, ex qua Y determinari poterit. Nam differentiando habebitur $\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}=\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}+dZ$, ex qua prodit $\sqrt{\int Ydx}$ $=\frac{dx\sqrt{\int ydx}}{dx+dZ\sqrt{\int ydx}}$ atque $\int Ydx=\frac{dx^2\int ydx}{(dx+dZ\sqrt{\int ydx})^2}$. Quia vero iſta quantitas ob datas x, y et Z conſtrui poteſt, ponatur ea $=$P, eritque $Ydx=dP$ conſequenter inuenitur $Y=\frac{dP}{dx}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante p functionem quamcunque ipſius z, erit $\frac{zdz}{dx} =$ ſubnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int ydx}{(1 + rp\sqrt{\int ydx})^2}$ atque $Y = \frac{dP}{dx}$.

Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia ſit vniformis, ſemper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore ſpatium AC abſoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int ydx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1 + rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dP}{dx}$.

Scholion.

Duas has poſteriores propoſitiones inter ſe fere ſimiles ideo innexi, quia peculiarem etiam ſoluendi modum requirunt, cuius vtilitas in ſequentibus reddetur conſpicua. Ceterum vero ipſae propoſitiones non ſunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes caſus motum rectilineum a potentiis productum reſpicientes exponere conſtituimus, neceſſario erant inſerendae. Neque vero eas ad caſus ſpeciales accommodare idoneum viſum eſt, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuiſſet perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio reſiſtente.

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN MEDIO RESISTENTE.

DEFINITIO 18.

367.

Lex reſiſtentiae eſt poteſtas ſeu functio celeritatis corporis, cui ipſa reſiſtentia eſt proportionalis. *Sic ſi reſiſtentia eſt celeritatis quadrato proportionalis, lex reſiſtentiae eſt celeritatis quadratum.*

Corollarium 1.

368. Cognoſcitur igitur ex lege reſiſtentiae, ſi plura puncta aequalia diuerſis ferantur celeritatibus, quomodo ſe habeant motus diminutiones inter ſe. Atque dato celeritatis decremento vnius puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio reſiſtentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter reſiſtentiam et vim grauitatis ex lege reſiſtentiae innoteſcet. Atque ex hoc effectus reſiſtentiae in corpus motum inuenietur.

Scholion 1.

370. Pertinet vtique vis reſiſtentiae ad potentias, atque ideo cum vi grauitatis eſt homogenea, quemadmodum, cum de motu corporum in fluidis tractabitur, apparebit. Semper igitur potentia abſoluta poterit aſſignari eundem in corpore effectum, quem reſiſtentia, producens. Haec vero potentia abſoluta pendebit a celeritate corporis, quam ob rem in eius expreſſione celeritas inerit, ſeu altitudo celeritati debita. Hoc igitur modo corporis motus in medio reſiſtente reducetur ad corporis motum a potentiis abſolutis ſollicitatum, cuius, cum ſupra in capite ſecundo leges ſint expoſitae, ex iis omnes quaeſtiones poterunt reſolui.

Scholion 2.

371. Directio vis reſiſtentiae in hac tractatione nobis ſemper erit congruens cum directione motus corporis (117) et contraria. Quamobrem potentia abſoluta ei ſubſtituenda motum ſemper retardabit, directione motus non mutata. Perſpicuum itaque eſt, vim reſiſtentiae, quoties eius expreſſio prodit negatiua, habituram directionem contrariam, motumque corporis eſſe acceleraturam. Hic quidem caſus in fluidis quieſcentibus locum habere nequit, ſed tamen in calculo, cum ex dato corporis motu reſiſtentia inueſtigabitur, ſaepe occurret.

Co-

Corollarium 3.

372. Corpus igitur in medio reſiſtente motum, ſi a nulla alia potentia ſollicitetur, in linea recta moueri debet. Quia enim a vi reſiſtentiae directio motus non mutatur, eius motus, quem a natura in linea recta proſequitur, perpetuo in eadem recta fiat neceſſe eſt.

Corollarium 4.

373. Si praeterea accedit potentia abſoluta cuius directio perpetuo cum directione motus congruit, corpus quoque in medio reſiſtente in linea recta progredietur. Neque enim potentia haec abſoluta neque vis reſiſtentiae directionem motus immutabit.

Scholion 3.

374. In hoc igitur capite, in quo motus tantum rectilineos exponere conſtituimus, alias potentias abſolutas cum vi reſiſtentiae non coniungemus, niſi quarum directio cum motus directione conuenit. Hanc ob rem omnes potentias, quas in capite praecedente adhibuimus, etiam in hoc capite cum vi reſiſtentiae coniunctas conſiderare licebit. Antequam autem potentias abſolutas inducemus, conuenit motum corporum a ſola reſiſtentiae vi impeditum examini ſubiicere, quo facilius a ſimplicioribus ad magis compoſita progrediamur.

Scholion 4.

375. In legis reſiſtentiae expreſſione ſeu illa celeritatis functione, praeter altitudinem celeritati debitam v ineſſe poſſunt quantitates conſtantes, ſed excludimus omnes quantitates variabiles a loco corporis pendentes. Fieri quidem poteſt, vt reſiſtentia, quam corpus aequali celeritate latum patitur, maior minorue ſit, prout corpus in alium atque alium locum perueniat; quemadmodum euenit, quando fluidum, in quo corpus mouetur in alio loco eſt denſius in alio vero rarius, quo caſu in reſiſtentiae expreſſione loci rationem haberi oportet. Neque tamen in lege reſiſtentiae locum reſpici conuenit, nam per eam reſiſtentiae rationem, quando corpus in eodem loco variis celeritatibus moueri ponitur, exprimere volumus. Discrimen vero quod ex loci varietate oriri poteſt in exponente reſiſtentiae comprehendemus, quo ſimul reſiſtentiae intenſitas indicatur.

DEFINITIO 19.

376. Exponens reſiſtentiae eſt altitudo debita celeritati ei, quam ſi corpus habet, reſiſtentiam patitur aequalem vi grauitatis. *Hac ſcilicet celeritate motum corpus tantum a reſiſtentia retardatur, quantum a vi grauitatis ſurſum proiectum.*

Corollarium 1.

377. Si igitur corpus in medio reſiſtente motum celeritatem habeat altitudini v debitam, atque haec altitudo v ſit ipſi exponenti reſiſtentiae aequa-

aequalis, erit, dum corpus per ſpatiolum dx progreditur, $dv=-dx$; quia potentia reſiſtentiae aequiualens hoc caſu aequalis eſt vi grauitatis, quam ſemper ponimus $=1$, et motum retardat.

Corollarium 2.

378. Datis ergo lege et exponente reſiſtentiae motus diminutio poteſt definiri. Namque ex exponente intelligitur, quantam corpus habere deberet celeritatem, vt reſiſtentiae vis aequalis eſſet grauitati, et ex lege reſiſtentiae cognoſcitur ratio, ſecundum quam diuerſae celeritates a reſiſtentia diminuuntur.

Scholion I.

379. Exponens reſiſtentiae eſt vel conſtans vel variabilis ſeu a loco, in quo eſt corpus, pendens. Illud accidit in medio ſeu fluido vniformi, quod corporibus vbique eandem reſiſtentiam infert, ſi quidem eadem vbique moueantur celeritate. Huiusmodi medium reſiſtens appellabimus vniforme, quippe quod in omnibus locis ſui eſt ſimile. Exponens autem reſiſtentiae variabilis eſt in medio ſeu fluido difformi, etiamſi in quoque loco ſeorſim reſiſtentia eandem teneat legem. Nam quo denſius eſt fluidum ſeu medium, in quo corpus verſatur, eo quoque maiorem patitur corpus reſiſtentiam aequali etiam motum celeritate. Maior ſcilicet erit celeritas reſiſtentiam grauitati aequalem patiens in fluido rariore, minor vero in denſiore. Quia autem denſitas

et raritas medii a loco pendet, perſpicuum eſt reſiſtentiae exponentem, ſi eſt variabilis a loco corporis pendere debere.

DEFINITIO 20.

380. Media reſiſtentia ſimilia hic vocantur, quae eandem habent reſiſtentiae legem. Diſſimilia vero, quae reſiſtentiae lege differunt. *Sic aqua et mercurius ſunt huiusmodi media ſimilia, ſiquidem ambo haec fluida reſiſtunt, vti videntur, in duplicata celeritatum ratione.*

Corollarium I.

381. Si ergo media reſiſtentia ſimilia inter ſe differunt, tota differentia conſiſtit in exponente reſiſtentiae, ſeu denſitate et raritate. Sic in aqua exponens reſiſtentiae eſt maior quam in argento viuo, quia hoc eſt fluidum denſius illo.

Scholion.

382. Media ſimilia cum corporibus aequaliter celeribus diuerſas facere queant reſiſtentias, prout eorum denſitates inter ſe differunt, has ipſas denſitates ex reſiſtentia, quam corpori data celeritate motu inferunt, metiri conuenit. In fluidis enim, vt, cum de motu corporum in fluido agitur, docetur, reſiſtentiae aequalibus celeritatibus factae ſunt denſitatibus fluidorum proportionales. Hancque proprietatem ad alia media quamcunque reſiſtentiae legem tenentia transferimus: quia aliae reſi-

ſiſtentiae leges praeter duplicatam celeritatam rationem mere ſunt imaginariae, et ad analyſin tantum exercendam adhiberi ſolent.

PROPOSITIO 49.
Problema.

383. *Corporis in recta* AP *moti in medio quocunque reſiſtente, cuius et lex et exponens reſiſtentiae ſunt cognita, data celeritate in puncto* P, *inuenire celeritatis decrementum, dum ſpatii elementum* Pp *percurrit.* Tab. IV Fig. 1.

Solutio.

Poſito elemento $Pp = dx$, ſit altitudo celeritati in P debita $= v$, et exponens reſiſtentiae $= q$. Denotat ergo $\sqrt{q}$ celeritatem, quam ſi corpus in P haberet, vis reſiſtentiae aequalis foret vi grauitatis $= 1$. Quamobrem, ſi eſſet $v = q$, tum haberetur vis reſiſtentiae $= 1$ atque $dv = -dx$ (376, 377). Sit autem V ea celeritatis $\sqrt{v}$ functio, qua reſiſtentiae lex exprimitur, atque deſignet Q ſimilem functionem ipſius $\sqrt{q}$, ſeu Q eſt huiusmodi quantitas, quae prodit, ſi in V loco v ſubſtituitur q. Reſiſtentia ergo, quam patitur corpus celeritate $\sqrt{q}$ motum, quae eſt $= 1$, ſe habebit ad reſiſtentiam corporis celeritate $\sqrt{v}$ moti, vt ſe habet Q ad V (367). Ex hoc elicitur vis reſiſtentiae, quam corpus celeritate $\sqrt{v}$ latum patitur, $= \frac{V}{Q}$. Quae cum motum retardet erit $dv = \frac{-V dx}{Q}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

384. Quia quantitas V eſt functio ipſius v et conſtantium, atque q, ideoque et Q vel eſt conſtans vel functio quaedam ipſius x (375); aequatio inuenta $dv = \frac{-Vdx}{Q}$ ſponte ſeparatur. Habetur enim $\frac{dv}{V} = \frac{-dx}{Q}$, ex qua integrata vel ſaltem conſtructa totus corporis motus per AP cognoſcitur.

Corollarium 2.

385. Cum vis reſiſtentiae ſit $= \frac{V}{Q}$, poterit ex hac medii denſitas cognoſci. Quia enim denſitatem metimur ex reſiſtentia, quam corpus data celeritate motum patitur, oportebit in $\frac{V}{Q}$ loco v ſubſtituere quantitatem conſtantem, quo facto habebitur reſiſtentia vt $\frac{1}{Q}$. Denſitas igitur medii quoque erit vt $\frac{1}{Q}$ ſeu reciproce vt Q.

Scholion.

386. Denotat hic $\frac{V}{Q}$ non tantum potentiam ſollicitantem, ſed iam ipſam vim retardatricem reſiſtentiae, et hanc ob rem non opus eſt maſſam corporis in calculum inducere. Ceterum hic corporis maſſam conſtantem ſeu plurium corporum maſſas inter ſe aequales ponimus. Non enim conſultum eſſe iudico hanc tractationem, quae non niſi in vnico caſu in vſum venire poteſt, praeter neceſſitatem extendere et magis complicatam reddere.

PRO-

PROPOSITIO 50.

Problema.

387. *In medio reſiſtenti vniformi, quod reſiſtit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, definire corporis moti celeritatem in ſingulis locis.*

Solutio.

Moueatur corpus in recta AP, ſitque celeritas eius in puncto A debita altitudini c. Ponatur ſpatium percurſum $AP = x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Exponens reſiſtentiae, qui eſt conſtans, vocetur $= k$, et lex reſiſtentiae ſit v^m, ita vt reſiſtentia vbique ſit vt celeritatis poteſtas exponentis $2m$. In praecedente igitur formula $dv = -\frac{Vdx}{Q}$ abit hoc caſu V in v^m, et Q, quia talis eſſe debet functio ipſius q ſeu k, qualis eſt v^m ipſius v, erit $= k^m$. Habemus ergo hanc aequationem $dv = -\frac{v^m dx}{k^m}$, ſeu $\frac{dv}{v^m} = -\frac{dx}{k^m}$. Cuius integralis eſt $\frac{v^{1-m}}{1-m} = C - \frac{x}{k^m}$. Conſtans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $x = o$ transmutari debeat v in c, quamobrem erit $C = \frac{c^{1-m}}{1-m}$. Hinc itaque reſultabit aequatio iſta $v^{1-m} = c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m}$, ſeu $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$, ſi eſt $m < 1$. At ſi erit $m > 1$, habebitur $v = \frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$. Vnicus vero caſus, quo

eſt $m=1$, in his formulis non comprehenditur, ſed deriuari debet ex aequatione differentiali, quae, facto $m=1$, erit huiusmodi $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{k}$, cuius integralis eſt $lv=C-\frac{x}{k}$. Simili vero modo erit $C=lc$, ideoque $lv=lc-\frac{x}{k}$. Logarithmis ad numeros reductis habebitur ergo $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Quemcunque igitur m habeat valorem, corporis celeritas in quouis loco rectae AP innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

388. Si reſiſtentia medii eſt quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$. Quamobrem pro hoc caſu, qui ſolus in rerum natura exiſtere putatur, valet ſingularis ſolutionis caſus $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Ex quo apparet corpus celeritatem ante non amittere totam, quam ſpatium infinitum x percurrerit.

Corollarium 2.

389. Si medium in maiore quam duplicata celeritatum ratione reſiſtit, erit $m>1$, atque

$$v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}.$$ Perſpicitur autem ex hac aequatione celeritatem non euaneſcere, niſi ponatur $x=\infty$.

Corollarium 3.

390. Hoc vero differt iſte caſus a priore, quo erat $m=1$, quod in illo, ſi fuerit celeritas initialis infinite magna, prodeat vbique ea tanta. Hoc ve-

vero caſu, quo eſt $m > 1$, ſi ponatur $c = \infty$, prouenit $v = \sqrt[m-1]{\frac{k^m}{(m-1)x}}$. Erit ergo v ſemper finitae magnitudinis, niſi ſit $x = o$ vel $= \infty$.

Corollarium 4.

391. Praeterea hoc caſu, quo $m > 1$, corpus antequam peruenit in punctum A, ſemper alicubi puta in C habuit celeritatem infinite magnam. Ad hoc punctum C inueniendum, fieri debet x negatiuum, et $k^m + (m-1)c^{m-1}x$ poni aequale nihilo. Vnde inuenitur $AC = \frac{k^m}{(m-1)c^{m-1}}$. Tab. IV. Fig. 2.

Corollarium 5.

392. Si reſiſtentia ſit in minore quam duplicata ratione celeritatum, ideoque eſt $m < 1$, erit $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$. Celeritas corporis ergo euaneſcit in puncto C, ſi accipiatur $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$. Conſequenter, cum corpus in C peruenerit, ibi perpetuo quieſcet, neque vltra progredietur. Tab. IV. Fig. 1.

Corollarium 6.

393. Si ponatur $m = o$, erit reſiſtentia conſtans et aequaliter aget in corpus ſiue quieſcens ſiue motum. Abit ergo hoc caſu reſiſtentia in potentiam abſolutam et aequalem vi grauitatis. Nam, quoniam ſi eſt $v = k$ reſiſtentia aequalis ponitur vi grauitatis, etiam quacunque alia celeritate corpus moueatur, tantundem reſiſtentiae patietur.

Scholion 1.

394. Expoſuimus in his corollariis primarias motuum differentias, ſi fuerit vel $m = 1$ vel maior vel minor vnitate. Hae vero differentiae breuibus hisce canonibus comprehendi poſſunt: ſi eſt $m = 1$, corpus per totum ſpatium nusquam neque celeritatem infinitam neque nullam habebit. Deinde ſi $m > 1$, corpus alicubi habeat celeritatem infinitam neceſſe eſt, euanescentem vero nusquam. Denique ſi $m < 1$ corpus alicubi celeritatem habebit nullam, infinitam vero nusquam.

Scholion 2.

395. Haec celeritatis diminutio permanet eadem in quamcunque plagam corpus moueatur, quia reſiſtentiam vbique eandem oſtendit. Neque enim hic motus ſimilis eſt ei, qui a potentia abſoluta contra vrgente diminuitur, quo fit, vt corpus in contrariam plagam motum tantumdem acceleretur, quantum ante erat retardatum. Sed ad motum in medio reſiſtente diminutum reſtituendum atque rurſus pariter accelerandum ac ante diminuebatur, oportet vim reſiſtentiae negatiuam ſtatui, atque ita in vim propellentem transmutari. Tum enim fiet $dv = \frac{Vdx}{Q}$, ex quo apparet celeritatem tantundem augeri, quantum ante minuebatur. Vi ergo reſiſtente in propellentem transmutata, motus corporis fiet retrogradus, atque ex P in A reuertetur ita, vt in ſingulis punctis ſpatii AP easdem recuperet celeritates, quas ante ibidem habebat.

Scho-

Scholion 3.

396. In caſibus, quibus $m < 1$, corpusque tandem ad quietem peruenit, occurrit eadem difficultas, cuius ſupra (316) mentio eſt facta, ſi motum transmutanda vi reſiſtente in propellentem velimus conuertere. Nam ſi corporis cum in C peruenerit celeritas eſt nulla, vis propellens $\frac{v^m}{k^m}$ quoque euaneſcit, ſi quidem m non eſt numerus negatiuus, et hanc ob rem nunquam ex loco C corpus poterit depelli. Hoc igitur caſu motus diminutionis non poterit in motum augmentationis conuerti. Calculus quidem contrarium oſtendit, nam ſi dicatur CP $= y$, erit altitudo debita celeritati in P, nempe $v = \sqrt[1-m]{\frac{(1-m)y}{k^m}}$. Quod autem ex hac aequatione ipſa abſurdum ſequatur, hinc apparet quod $\frac{1}{1-m}$ exponens ipſius y eſt vnitate maior, ideoque ſcala altitudinum celeritatibus debitarum rectam AC in C tangat. Quoties enim hoc euenit, corpus ex puncto C nunquam egredi poteſt, etiamſi calculus ſecus commonſtret (319).

PROPOSITIO 51.
Problema.

397. *Moto corpore in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtentiam facit poteſtati cuicunque celeritatum proportionalem; determinare tempus, quo corpus ſpatium quodcunque* AP *percurrit.*

Solutio.

Poſitis vt in praecedente problemate, celeritate initiali in A$=\sqrt{c}$, AP$=x$, celeritate in P$=\sqrt{v}$, exponente reſiſtentiae $=k$ et lege $=v^m$, ita vt vis reſiſtentiae ſit vt celeritatis poteſtas exponentis $2m$. Quia iam eſt $v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}$ (387) ſi quidem $m>1$, erit $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}$. Elementum ergo temporis quo ſpatiolum dx percurritur eſt $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$, cuius integralis eſt $=\frac{C+2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$, quod exprimit tempus per ſpatium AP, ſi modo conſtans C recte determinatur, id quod fit efficiendo, vt facto $x=o$ totum tempus euanescat. Debebit itaque eſſe $C=-\frac{2k^{\frac{2m^2-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$; quamobrem totum tempus per ſpatium AP$=\frac{2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}-2k^{\frac{2mm-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}k^{\frac{m}{2m-2}}}$.

Quae

Quae expreſſio quoque valet ſi $m < 1$. At ſi eſt $m = 1$, peculiari operatione opus eſt, nam quia eſt $v = ce^{\frac{x}{k}}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{\frac{x}{2k}}dx}{\sqrt{c}}$, cuius integrale eſt $\frac{2ke^{\frac{x}{2k}} - 2k}{\sqrt{c}}$, quod exprimit tempus, quo ſpatium AP percurritur. Quemcunque ergo valorem habeat m, tempus ex his formulis per ſpatium quodcunque determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

398. Si ergo reſiſtentia quadratis celeritatum eſt proportionalis, et conſequenter $m = 1$, tempus quo corpus ſpatium infinitum deſcribit, quoad ſcilicet totum ſuum motum amittit, erit quoque infinitum.

Corollarium 2.

399. Si vero eſt $m > 1$, erit quoque $2m > 1$, et conſequenter formula exprimens tempus per AP inuenta recte eſt diſpoſita. Ex ea autem apparet, tempus, donec corpus totum motum amittat, fore infinitum, id quod facile ex hoc perſpicitur, quod ſpatium quoque ſit infinitum (389).

Corollarium 3.

400. Quia vero hoc caſu corpus, antequam peruenit in A, alicubi in C habuit celeritatem infinitam, tempus etiam, quo ex C in A pertingit innotescet facto $k^m + (m-1)c^{m-1}x = 0$ (391). Quo facto reſultat tempus per CA $= \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$. Tab. IV. Fig. 2.

Co-

Corollarium 4.

401. Si fuerit $m<1$, duo caſus ſunt a ſe inuicem diſtinguendi, quibus m vel maius eſt quam $\frac{1}{2}$ vel minus. Si enim eſt $m>\frac{1}{2}$, manet $2m-1$ numerus affirmatiuus, et tempus quo ſpatium AP abſoluitur erit

$$= \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}}{(2m-1)(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}} - \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}.$$

Corollarium 5.

Tab. IV. Fig. 1. 402. Quia corpus hac hypotheſi motum, omnem celeritatem amittit, cum in C peruenit exiſtente $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$ (392), erit tempus, quo ſpatium hoc AC percurrit, ob denominatorem $(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}$ euaneſcentem, infinitum. Hoc igitur euenit, ſi m intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur.

Corollarium 6.

403. Sin vero fuerit $m<\frac{1}{2}$ erit tempus, quo ſpatium quodcunque AP percurritur $= \frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m}$

$$- \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{1-2m}{2-2m}}}{1-2m}.$$ Ex quo apparet tempus, quo corpus ex A in C, vbi totum ſuum motum amittit, eſſe finitum et $= \frac{2c^{1-2m}k^m}{1-2m}$. Fit enim hoc caſu $c^{1-m}k^m-(1-m)x=0$ (392).

Scho-

Scholion 1.

404. In his autem formulis non continetur caſus, quo $m=\frac{1}{2}$. i. e. ſi reſiſtentia eſt celeritatibus proportionalis. Hic igitur caſus ex formula differentiali temporis eſt deducendus. Poſito autem $m=\frac{1}{2}$ prodit $\frac{dx}{\surd v}=\frac{2dx\surd k}{2\surd ck-x}$. Cuius integrale a logarithmis pendet atque eſt $=2\surd k\,l\frac{C}{2\surd ck-x}$. Conſtans vero C debet eſſe $2\surd ck$, quo tempus euaneſcat facto $x=0$. Conſequenter tempus quo ſpatium AP percurritur erit $2\surd k\,l\frac{2\surd ck}{2\surd ck-x}$.

Corollarium 7.

405. In hoc itaque caſu, quo $m=\frac{1}{2}$, quia ſpatium AC, quo corpus percurrendo totum motum perdit, eſt $=2\surd ck$ (392), tempus quo hoc ſpatium percurritur eſt infinitum.

Corollarium 8.

406. Ex his igitur omnibus colligitur tempus, quo corpus totum ſuum motum amittit eſſe infinitum, ſi fuerit $2m$ vel aequalis vnitati, vel ea maior; contra vero ſi eſt $2m$ vnitate numerus minor, tempus totius motus eſſe finitum.

Scholion 2.

467. Si vis reſiſtentiae transmutatur in propellentem, quo caſu motus fit retrogradus et ſimili modo augetur, quo ante minuebatur; tempora eadem eſſe debebunt, quae hic ſunt definita. Nam quia corporis ſpatium AP percurrentis in ſingulis locis eadem eſt velocitas ſiue ex A in P motu retar-

dato ſiue viciſſim ex P in A motu accelerato feratur, inter vtrumque tempus diſcrimen eſſe non poteſt. Attamen iis caſibus, quibus ſpatium totum AC tempore finito abſoluitur, haec regula non valet, quia corpus in C quieſcens nullam vim propellentem ſentire poteſt (396). Semper vero huic regulae confidere poſſumus, ſi corpori finita celeritas initialis tribuatur.

PROPOSITIO 52.
Problema.

Tab. IV. Fig. 3. 408. *Sollicitetur corpus, quod mouetur in medio quocunque reſiſtente, a potentia quacunque abſoluta, determinare celeritatis incrementum vel decrementum, dum quodvis elementum* Pp *percurrit.*

Solutio.

Sit corporis celeritas in P debita altitudini v, et elementum percurrendum P$p=dx$. Sit porro potentia abſoluta ſeu potius eius vis accelerans in P$=p$, atque exponens reſiſtentiae $=q$. Deſignet V eam ipſius v functionem, cui reſiſtentia proportionalis eſt, ſitque Q talis functio ipſius q, qualis V eſt ipſius v. His poſitis retardabitur corpus, dum per elementum Pp mouetur, vi reſiſtentiae $\frac{V}{Q}$ (383); interea vero ſimul acceleratur potentia abſoluta p. Quamobrem corpus elementum Pp percurrens accelerabitur a vi $p-\frac{V}{Q}$. Ex quo igitur erit $dv=pdx-\frac{V}{Q}dx$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

409. Si igitur eſt $p > \frac{V}{Q}$ celeritas corporis elementum Pp percurrentis augebitur; ſin vero $p < \frac{V}{Q}$, eius celeritas diminuetur. Atque ſi fuerit $p = \frac{V}{Q}$ celeritas neque augebitur, neque minuetur, ſed immutata manebit per elementum Pp.

Corollarium 2.

410. Si potentia abſoluta fuerit motui contraria, eumque retardet; erit $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Hoc igitur caſu corpus ab vtraque vi retardabitur.

Scholion 1.

411. Si potentia abſoluta corpus deorſum trahat, vt in ſolutione problematis poſuimus, atque corpus ſurſum moueatur, habebit et potentiam abſolutam et vim reſiſtentiae contrariam. Tum igitur habebitur iſta aequatio $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Ex quo apparet motum ascendentem non ſimilem fore descendenti, quia vis ſollicitans in ascenſu non eſt negatiua ratione vis ſollicitantis in descenſu. Quo igitur ascenſus ſimilis ſit descenſui atque corpus in vtroque motu in iisdem locis eandem habeat celeritatem, oportet vim reſiſtentiae in ascenſu transmutari in propellentem. Quo facto habebitur $dv = -pdx + \frac{V}{Q}dx$, ex qua aequatione perſpicitur corpus ascendens per Pp tantundem retardari, quantum ante in descenſu accelerabatur.

Scholion 2.

412. Aequatio inuenta $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$ hac ſumma extenſione ob defectum analyſeos neque ſeparari neque conſtrui poteſt: et hanc ob rem celeritas corporis in P non poteſt determinari. Multo minus igitur tempus, quo ſpatium AP abſoluitur poterit aſſignari. Relinqui ergo oportet hanc generalem aequationem, atque descendi ad caſus particulares, quibus aequatio poteſt ſeparari ac celeritas definiri. Triplici vero modo aequatio iſta ſeparationem indeterminatarum x et v admittit. Quorum primus eſt, ſi x plus vna dimenſione non habet. Secundus ſi v vnicam tantum obtinet dimenſionem. Tertius caſus habebitur, ſi x et v ſimul vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt; vel ſi aequatio ad aliam hac proprietate praeditam reduci poterit.

Corollarium 3.

413. Primus caſus ergo habetur, ſi et p et q fuerint conſtantes, tum enim quia et Q conſtans erit, prodit $dx = \frac{Qdv}{pQ - V}$, in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Praeterea vero etiam aequatio ſeparari poterit ſi fuerit $p = \frac{A}{Q}$. Tum enim erit $\frac{dv}{A - V} = \frac{dx}{Q}$, quae quia V ab v, et Q ab x pendent, conſtrui poteſt.

Corollarium 4.

414. Quo v vnicam habeat dimenſionem oportet ſit $V = v$, quo caſu quoque erit $Q = q$, et aequa-

aequatio generalis abibit in hanc $dv = pdx - \frac{vdx}{q}$, quae in determinatarum ſeparationem admittit.

Corollarium 5.

415. Quo appareat, quando aequatio homogenea ſit futura, ſit $V = v^{\alpha}$, et $q = x^{\beta}$, erit $Q = x^{\alpha\beta}$. Sit porro $p = x^{\gamma}$, et computetur v conſtituere δ dimenſiones dum x vnam adimplet. His poſitis aequatio illa abibit in hanc $dv = x^{\gamma}dx - \frac{v^{\alpha}dx}{x^{\alpha\beta}}$ in cuius primo termino cenſendae ſunt δ dimenſiones; in ſecundo $\gamma + 1$ dimenſiones, et in tertio $\alpha\delta + 1 - \alpha\beta$. Debet igitur eſſe $\delta = \gamma + 1$, atque $\gamma + 1 = \alpha\gamma + \alpha + 1 - \alpha\beta$, ſeu $\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\beta - 1)$. Quoties igitur fuerit $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ toties aequatio ad homogeneitatem poteſt reduci, adeoque celeritas ipſa determinari.

Scholion 5.

416. Loco V, q et p alias functiones non asſumere licet niſi poteſtates ipſarum v et x. Nam, quia in V non ineſſe poteſt x atque in q et p non ingreditur v, ac inſuper numerus dimenſionum ipſarum x et v vbique vel debet eſſe idem, vel ad eundem reducibilis; loco harum quantitatum neceſſario poteſtates debent aſſumi. Hanc ob rem poſui $V = v^{\alpha}$, $q = x^{\beta}$, et $p = x^{\gamma}$, atque ſuperiorem analogiam $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ elicui. Neglexi quidem coefficientes, qui ſalua hac reductione poſſunt adiici: nam homogeneitas hisce perturbari non poteſt. Itaque poteſt poni $q = Bx^{\beta}$ et $p = Cx^{\gamma}$, manente

eadem analogia. Pro x vero non ſolum ſpatium percurſum AP poteſt ſubſtitui, ſed illud ipſum quacunque conſtante auctum, dummodo eius differentiale ſit dx vel huius aliquod multiplum. Ad v^α coefficientem addere non eſt opus, quia per V ratio tantum reſiſtentiae indicatur.

Corollarium 6.

417. Si medium reſiſtens eſt vniforme ideoque $\delta = 0$; erit $\alpha = -1 : \gamma$. Vnde fit $\gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Quare ſi fuerit lex reſiſtentiae v^α, potentia abſoluta debebit eſſe $= Bx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, quo aequatio celeritatem definiens ad homogeneitatem poſſit reduci.

Scholion 4.

418. Hos motus rectilineos in medio reſiſtente ita ſumus pertractaturi, vt primo potentiam abſolutam conſtantem ponamus, tumque ad quaſuis vires centripetas progrediamur. Hisque expoſitis quaeſtiones inuerſas contemplabimur, quemadmodum in praecedente capite fecimus, atque ex datis proprietatibus motus cum potentiam abſolutam tum reſiſtentiae vim eruemus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

419. *Poſita potentia abſoluta, et medio reſiſtente vniformi; determinare corporis deſcendentis celeritatem in ſingulis locis, ſi reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis.*

So-

Solutio.

Manentibus vt hactenus $AP = x$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, ſit potentia vniformis $= g$, exponens reſiſtentiae $= k$. Quia lex reſiſtentiae eſt v, erit vis reſiſtentiae $= \frac{v}{k}$. Ex quibus prodit $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$, ſeu $dx = \frac{kdv}{gk - v}$; cuius integralis eſt $x = kl\frac{C}{gk-v}$. Sit celeritas initialis in A debita altitudini c debebit eſſe $C = gk - c$, atque $x = kl\frac{gk-c}{gk-v}$. Logarithmorum loco ſumantur numeri $e^{\frac{x}{k}} = \frac{gk-c}{gk-v}$; ex qua aequatione prouenit $e^{\frac{x}{k}}v = c + gk(e^{\frac{x}{k}} - 1)$ ſeu $v = e^{\frac{-x}{k}}c + gk(1 - e^{\frac{-x}{k}}) = e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk$. Q. E. I.

Corollarium 1.

420. Si corpus in A motum ex quiete inchoet, erit $c = 0$. Hoc igitur in caſu habebitur $v = gk(1 - e^{\frac{-x}{k}})$, quae expreſſio, quo maior accipitur x, magis quoque augetur, certum tamen terminum nunquam poteſt transgredi. Nam ſumto $x = \infty$, habebitur $v = gk$. Eſt ergo $\sqrt{gk}$ aſymtotos celeritatum corporis deſcendentis, quam ante non acquirit, quam ex ſpatio infinito fuerit delapſum.

Corollarium 2.

421. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit huic aſymtoto $\sqrt{gk}$ aequalis, motus corporis deſcendentis erit vniformis, fit enim $v = gk = c$. Apparet hoc etiam ex aequatione differentiali, $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$.

Nam

Nam ſi ſemel fuerit $v = gk$, incrementum celeritatis erit perpetuo euaneſcens.

Corollarium 3.

422. Si fuerit $c < gk$, corpus deſcendens mouebitur motu accelerato, nunquam tamen celeritatem $\sqrt{gk}$ acquiret, niſi ſpatio infinito percurſo. Si enim eſt $c < gk$, quantitas $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ ſemper eſt negatiua, et hanc ob rem v perpetuo erit minor quam gk.

Corollarium 4.

423. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit maior quam $\sqrt{gk}$, erit $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ quantitas poſitiua, ideoque v vbique maior quam gk. Percurſo vero ſpatio infinito fiet $v = gk$. Ex quo perſpicitur corpus hoc caſu motu retardato deſcendere.

Scholion 1.

424. Comprehendi debet in hac aequatione $v = e^{\frac{-x}{k}}(c-gk) + gk$ etiam caſus, quo corpus in vacuo a ſola potentia abſoluta ſollicitatum deſcendit. Hicque habebitur, ſi reſiſtentia ponatur euaneſcens, ſeu exponens k infinitus, tum enim reſiſtentiae vis $\frac{v}{k}$ euaneſcit. Difficile autem videtur determinatu, quem valorem habitura ſit altitudo v, facto $k = \infty$. Ad hunc vero inueniendum plurimum conducit $e^{\frac{-x}{k}}$ in ſeriem aequiualentem $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} +$ etc. transmu-

mutare, cuius ſi k eſt ∞ ſufficit loco accipere $1-\frac{x}{k}$. Quo valore loco $e^{\frac{-x}{k}}$ ſubſtituto habebitur $v=c-\frac{cx}{k}+gx=c+gx$ ob euanescentem terminum $\frac{cx}{k}$. Quae aequatio conuenit cum ea, quam ſupra (239) inuenimus; nam quod ibi eſt $\frac{g}{A}$ hic nobis eſt tantum g. Quoniam g nonſolum potentiam abſolutam, ſed vim eius accelerantem exhibet.

Scholion 2.

425. Si k non quidem habet valorem infinitum, ſed tamen perquam ingentem; prout accidit, quando corpora vehementer grauia in fluido tenui delabuntur; magnam praeſtabit vtilitatem ſuperior ſeries, ſumendis tantum tribus terminis primis $1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}$ loco $e^{\frac{-x}{k}}$: error enim erit inſenſibilis. Hoc igitur caſu ſi corpus ex quiete delabatur, vt ſit $c=0$, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}$. Ex qua aequatione vero proximus ipſius v valor eruitur. At ſi prorſus nihil negligere velimus, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^2}{6k^2}-\frac{gx^4}{24k^3}+\frac{gx^5}{120k^4}-$ etc. qua ſerie infinita verus valor ipſius v exprimitur.

PROPOSITIO 54.

Problema.

426. *Determinare tempus, quo corpus in medio reſiſtente vniformi, exiſtente reſiſtentia celeritatum quadratis proportionalis, a potentia abſoluta vniformi ſollicitatum per ſpatium* AP *deſcendit.*

Solutio.

Poſitis vt ſupra $AP = x$, celeritate in $A = \sqrt{c}$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, exponente reſiſtentiae $= k$, erit $v = gk + e^{\frac{-x}{k}}(c - gk)$, (419). Ex quo habebitur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{(gk + e^{\frac{-x}{k}}(c - gk))}}$. Ad quod integrandum pono $e^{\frac{-x}{k}} = z$ et $c - gk = b$, breuitatis cauſa; eritque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-kdz}{z\sqrt{(gk + bz)}}$. Fiat porro $gk + bz = r^2$, erit $z = \frac{r^2 - gk}{b}$, et $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2kdr}{r^2 - gk} = \frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r + \sqrt{gk}} - \frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r - \sqrt{gk}}$. Quocirca erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}} = C + \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{r + \sqrt{gk}}{r - \sqrt{gk}}$. Reſtituatur loco r ſuus valor $\sqrt{(gk + e^{\frac{-x}{k}}(c - gk))}$, et habebitur tempus deſcenſus per ſpatium $AP = C + \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} - \sqrt{gk}}$. Quod quo euaneſcat facto $x = 0$, debebit eſſe $C = -\sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{c} + \sqrt{gk}}{\sqrt{c} - \sqrt{gk}}$. Ex his conficitur tempus deſcenſus per AP $= \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} - \sqrt{gk}} - \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{c} + \sqrt{gk}}{\sqrt{c} - \sqrt{gk}}$. Quae expreſſio ſimplicior reddi poteſt ita, vt prodeat $\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{c} + \sqrt{gk}}$; cui itaque tempus deſcenſus per AP aequale eſt. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

427. Si celeritas initialis fuerit $=0$, ideoque $c=0$, erit tempus, quo corpus per altitudinem AP deſcendit $=\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})+1)}=\frac{x}{\sqrt{gk}}$ $-2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}{e^{\frac{-x}{k}}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}-\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}$ $l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Scholion 1.

428. Formula etiam generalis temporis per AP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ transmutatur poſito $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,le^{\frac{x}{2k}}$ loco $\frac{x}{\sqrt{gk}}$ in hanc $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}gk+c-gk)}+\sqrt{e^{\frac{x}{k}}gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$ Ex qua ea, quam modo pro caſu $c=0$ inuenimus, ſponte ſequitur, prodit enim $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Corollarium 2.

429. Si ponatur $c=gk$, quo caſu motus deſcenſus eſt aequabilis (421), prodibit tempus deſcenſus per ſpatium AP ex hac vltima forma $=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}=\frac{x}{\sqrt{gk}}$, quemadmodum ex natura motu- aequabilis quoque reperitur. Tempus enim debet exs primi ſpatio percurſo x diuiſo per celeritatem $\sqrt{gk}$.

Scholion 2.

430. Tempora haec autem habebuntur in minutis ſecundis, ſi inuentae expreſſiones per 250

diuidantur, et lineae c, k, x in ſcrupulis pedis Rhenani exhibeantur (222).

Scholion 3.

431. Poſita celeritate initiali $c = 0$, ſi detur tempus, quo ſpatium AP deſcendendo percurritur, poterit ipſum ſpatium AP determinari. Nam ſit tempus t minutorum ſecundorum, denturque k et x in ſcrupulis pedis Rhenani, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}} - 1)})$. Conſequenter $e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}} = \sqrt{e^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}} - 1)}$. Hinc inuenitur $e^{\frac{x}{2k}} = \frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}{2e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}}$ atque $x = 2kl(\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}{2}) - 250t\sqrt{gk}$, vel etiam $x = 250t\sqrt{gk} - 2kl\frac{2}{e^{-250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}$. Hocque ſpatium x reperitur in partibus milleſimis pedis Rhenanis.

Scholion 4.

432. Si k fuerit quantitas vehementer magna, et tempus tantum quam proxime deſideretur per AP, exiſtente celeritate initiali $\sqrt{c} = 0$; aſſumo hanc formulam $\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})} + 1)$. In qua, quia $\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})}$ fere euaneſcit ſi k eſt valde magnum, erit $l(1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})}) = \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})} - \frac{1 + e^{\frac{-x}{k}}}{2} +$ (1−e

$\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{2}}{4}+\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{5}{2}}}{5}$. Eſt vero etiam quam proxime $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}-\frac{\sqrt{xx}}{4k\sqrt{k}}+\frac{5x^2\sqrt{x}}{96k^2\sqrt{k}}$. Ex quo prouenit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})})=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}-\frac{x}{2k}+\frac{x\sqrt{x}}{12k\sqrt{k}}+\frac{x^2\sqrt{x}}{480k^2\sqrt{k}}$. Quamobrem habebitur tempus deſcenſus per ſpatium $AP=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}+\frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}}+\frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

433. Quando itaque reſiſtentia euaneſcit, ideoque fiat $k=\infty$, prodibit deſcenſus corporis per AP a ſola potentia abſoluta g ſollicitati. Huius vero deſcenſus tempus ex hac poſtrema formula, ob euaneſcentes omnes terminos praeter primum, inenitur $=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, quemadmodum iam ſupra (218) eſt inuentum; neglecto numero m et g poſito loco $\frac{g}{A}$ vt hic inſtituimus.

PROPOSITIO 55.

Problema.

434. *Si corpus in medio reſiſtente uniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione, ex* B *data celeritate ſurſum proiiciatur, atque ſollicitetur potentia uniformi* g; *determinari oporteat celeritatem corporis in ſingulis locis.* Tab. IV. Fig. 4.

Solutio.

Sit celeritas in puncto $B=\sqrt{c}$, et celeritas in $P=\sqrt{v}$, ponatur $BP=x$, et reſiſtentiae exponens $=k$;

$=k$; Quia nunc motus et a potentia abſoluta g et a reſiſtentia $\frac{v}{k}$ retardatur erit $dv=-gdx-\frac{vdx}{k}$. Hinc fit $dx=\frac{-kdv}{gk+v}$ et $x=kl\frac{C}{gk+v}$, vbi debet eſſe $C=gk+c$ quo fiat $v=c$ facto $x=o$. Quamobrem habebimus $x=kl\frac{gk+c}{gk+v}$; ex qua erit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$, quae determinat celeritatem in quouis loco P. Q. E. I.

Corollarium 1.

435. Pertingat corpus hoc modo ſurſum poiectum ad A vsque, et ſit celeritas in $A=o$. Quocirca altitudo tota BA reperietur faciendo $v=o$, quo caſu fit $e^{\frac{-x}{k}}=\frac{gk}{c+gk}$ ſeu $x=kl\frac{c+gk}{gk}$, cui quantitati aequalis eſt altitudo BA.

Corollarium 2.

436. Euaneſcat reſiſtentia, ſeu fiat $k=\infty$ vt motus fiat in vacuo, erit $e^{\frac{-x}{k}}=1-\frac{x}{k}$. Hoc igitur caſu erit $v=c-gx$. Eademque aequatio reperitur, ſi corpus a potentia ſola abſoluta g ſollicitatum conſideretur.

Corollarium 3.

437. Si medium reſiſtens fuerit valde rarum, ita vt k numerum vehementer magnum ſignificet, poterit loco $e^{\frac{-x}{k}}$ accipi $1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}-\frac{x^3}{3k^3}$. Ex quo erit $v=c-\frac{cx}{k}+\frac{cx^2}{2k^2}-gx+\frac{gx^2}{2k}-\frac{gx^3}{3k^2}$ q. p. Quo autem haec quantitas valorem vero proximum ipſius v exhibeat,

at, non ſolum opus eſt vt k ſit numerus valde magnus, ſed inſuper requiritur vt altitudo x multo ſit minor quam k, quo $e^{\frac{-x}{k}}$ non multum ab vnitate differat.

Scholion I.

438. Iam animaduertimus deſcenſum coporis per AB non ſimilem eſſe aſcenſui, ſi medium in vtroque caſu reſiſtens ponatur. Poteſt tamen deſcenſus per AB cogitatione concipi, qui prorſus ſimilis ſit aſcenſui, ita vt corpus tam in aſcenſu quam deſcenſu in puncto P eandem habeat celeritatem. Ad hoc autem ſtatui oportet in deſcenſu et potentiam abſolutam accelerantem, et medium propellens. Nam quia in aſcenſu ambae motui erant contrariae, neceſſe eſt vt in deſcenſu vtraque ſecunda conſtituatur, quo motus fiat perfecte retrogradus.

Corollarium 4.

439. Poſita igitur altitudine $AP = y$, et celetate hoc deſcenſu $= \mathcal{V}v$, erit $dv = pdy + \frac{vdy}{k}$. Ex qua integrata prodit $v = gk^{\frac{y}{k}} - 1$.

Scholion 2.

440. Congruit haec aequatio cum priore quam accenſum contemplantes eruimus. Eſt enim $y = AB - x = k\,l\frac{c+gk}{gk} - x$, ideoque $e^{\frac{y}{k}} = \frac{c+gk}{gk}.e^{\frac{-x}{k}}$. Ex hoc igitur prodit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$; quemadmodum

dum ſupra inuenimus in ſolutione problematis. Apparet igitur in hoc deſcenſu corpus in ſingulis punctis P easdem eſſe habiturum celeritates, quas habuit ibidem in aſcenſu. Idem ergo etiam neceſſe eſt reperiatur tempus deſcenſus hoc modo conſiderati, ac ex aſcenſu prouenit.

PROPOSITIO 56.

Problema.

441. *Determinare tempus aſcenſus per* BP *corporis in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex* B *data celeritate ſurſum proiecti, et interim ſollicitati a potentia abſoluta* g *deorſum tendente.*

Solutio.

Poſitis celeritate in B$=\sqrt{c}$, eaque in P$=\sqrt{v}$; deinde BP$=x$ et exponente reſiſtentiae $=k$, erit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$ (434). Ex quo oritur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}}$. Ad quod integrandum pono vt ſupra $e^{\frac{-x}{k}}=z$ et $c+gk=b$, breu. gr. quo facto habebitur $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-kdz}{z\sqrt{(bz-gk)}}$. Sit $bz-gk=r^2$, erit $z=\frac{r^2+gk}{b}$, atque $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2kdr}{r^2+gk}$, cuius integratio a

Tab. IV. Fig. 5. quadratura circuli pendet. Ad hoc igitur conſtruendum conſtituatur quadrans circuli abc cuius radius ac ſit $=1$, ſumatur in eo tangens $at=\frac{r}{\sqrt{gk}}$, eritque arcus $am=\int\frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk}$ qui ſignetur hoc modo A$\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Hu-

ius-

iusmodi ſcilicet expreſſio A t nobis denotet arcum circuli, cuius tangens eſt t exiſtente radio $=1$. Hanc ob rem erit $\int\frac{-2kdr}{r^2+gk} = -2\sqrt{\frac{k}{g}}\int\frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$ A. $\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Quia autem eſt $r = \sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}$, erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}$. Quae quantitas cum debeat euaneſcere facto $x=o$, dabit $C = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$A. $\sqrt{\frac{c}{gk}}$. Tempus igitur aſcenſus per ſpatium BP inue- Tab. IV. Fig. 4.
nitur $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{c}{gk}} - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$ (A.$\sqrt{\frac{c}{gk}}$ − A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}$) $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$A.$\frac{\sqrt{cgk}-\sqrt{(gke^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-g^2k^2}}{gk+\sqrt{(ce^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-cgk)}}$

Q. E. I.

Corollarium 1.

442. Quia tota altitudo AB ad quam corpus pertingere poteſt habetur faciendo $x = kl\frac{c+gk}{gk}$ quo caſu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$; Inuenietur tempus totius aſcenſus $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$A. $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{gk}}$.

Corollarium 2.

443. Quare ſi fuerit $c = gk$ erit tempus totius aſcenſus per BA $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A. 1. At arcus cuius tangens aequatur radio eſt peripheriae pars octaua. Poſita itaque quarta peripheriae parte $amb = \pi$, erit tempus aſcenſus per BA $= \pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

Corollarium 3.

444. Ex hoc quoque intelligitur, ſi celeritate infinita corpus ex B ſurſum proiiciatur tempus aſcenſus totius nihilo minus fore finitum, fit enim $=2V\frac{k}{g}.A.\infty$; qui arcus cum ſit quarta peripheriae pars $=\pi$, erit tempus totius aſcenſus $=2\pi V\frac{k}{g}$.

Corollarium 4.

445. Si loco celeritatis initialis Vc detur tota altitudo BA$=a$, ad quam corpus pertingit, quia eſt $a=kl\frac{c+gk}{gk}$ et propterea $c=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$; reperietur tempus totius aſcenſus per BA$=2V\frac{k}{g}.A.V(e^{\frac{a}{k}}-1)$.

Scholion 1.

446. Si transmutetur aſcenſus in deſcenſum medio accelerante, vt ſupra aſſumſimus (438) et vocetur AP$=y$, erit tempus deſcenſus per AP$=2V\frac{k}{g}A.V(e^{\frac{y}{k}}-1)$, ſubſtituto y loco a in ſuperiore formula. Ibi enim a denotabat altitudinem aſcenſu percurſam, hic vero eſt y altitudo integra, ad quam corpus celeritate, quam P habet, pertingere poteſt.

Scholion 2.

447. Aequatio fundamentalis pro deſcenſu hoc modo conſiderata eſt $dv=gdy+\frac{vdy}{k}$ (438), quae ex aequatione fundamentali pro vero deſcenſu $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$ (419) poteſt formari ponendo y loco x et $-k$ loco k. Quare etiam expreſſio temporis vero

pro-

proxima per ſpatium AP ex ea quam ſupra inuenimus (432) pro vero deſcenſu, accommodari poterit ad hunc deſcenſum imaginarium aſcenſus inuerſum; ponendo quoque y loco x et $-k$ loco k. Hoc itaque modo inuenitur tempus deſcenſus per ſpatium $AP = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ *q. p.* dummodo $\frac{y}{k}$ fuerit numerus vnitate minor.

Corollarium 5.

448. Si medii reſiſtentia prorſus euaneſcat, vt fiat $k = \infty$, erit tempus totius aſcenſus per ſpatium $BA = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Quae expreſſio prouenit ex ſuperiore $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ poſito a loco y, omnes enim termini praeter primum euaneſcunt.

Corollarium 6.

449. Poterit hinc etiam ex dato tempore integri aſcenſus t reperiri altitudo percurſa a. Nam quia eſt $t = 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, erit tangens arcus $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$. Vocetur illa tangens T, erit $T^2 + 1 = e^{\frac{a}{k}}$ et $a = kl(T^2 + 1)$.

PROPOSITIO 57.

Problema.

450. *Dato tempore quo corpus ex* B *ſurſum proiectum iterum in* B *decidit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione, et ſollicitante potentia abſoluta vniformi* g, *determinare altitudinem* BA *ad quam* Tabula IV, Fig. 4.

corpus peruenit, vt et celeritatem initialem in B *et finalem poſt deſcenſum in eodem loco* B ; *nec non tempus aſcenſus per* BA *et tempus deſcenſus per* AB.

Solutio.

Sit datum tempus $=t$, quod eſt ſumma temporum aſcenſus et deſcenſus per rectam BA, et exponens reſiſtentiae $=k$. Ponatur altitudo BA quaeſita $=x$. Erit tempus aſcenſus par $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}} A . \sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$, (445) atque tempus deſcenſus ſequentis ex A in $B = 2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{c^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, (427). Ex quibus conflatur iſta aequatio $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = A . \sqrt{(e^{\frac{x}{k}} - 1)} + l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, ex qua inueniri poteſt x. Cognita autem altitudine x dabitur ſimul et tempus aſcenſus per BA et tempus deſcenſus per AB. Porro data altitudine $BA = x$, erit altitudo generans celeritatem in B, qua aſcendit $= gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ (420), et altitudo generans celeritatem, qua decidit in $B = gk(1-e^{\frac{-x}{k}})$ (420). Q. E. I.

Corollarium I.

451. Erit ergo celeritas aſcendens in B ad celeritatem deſcendentem ibidem vt $e^{\frac{2k}{x}}$ ad 1. Ex quo apparet tanto magis de motu amitti quanto corpus altius aſcendat.

Scho-

Scholion 1.

452. Si fuerit k numerus valde magnus neque altitudo x admodum magna, vt loco temporum ſupra inuentas expreſſiones algebraicas adhibere liceat; erit tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (447), atque tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{6k\sqrt{g}}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (432). Quorum temporum ſumma, quia data eſt, habebitur $t\sqrt{g} = 4\sqrt{x} + \frac{x^2}{120k^2}$, quam proxime.

Scholion 2.

453. Accuratius autem definietur haec temporum ſumma magis continuandis ſeriebus tempora aſcenſus et deſcenſus exprimentibus. Fit ſcilicet tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} -$ etc. et tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} +$ etc. Quamobrem horum temporum ſumma $t = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{230400k^4\sqrt{g}}$ etc. Vbi notandum ſi tempus detur in minutis ſecundis, et k et x in ſcrupulis pedis Rhenani exprimantur, ſuperiorem ſeriem per 250 eſſe diuidendam. Ita ſi tempus t ſit μ minutorum ſecundorum debebit pro t ſubſtitui 250μ.

Corollarium 2.

454. Ex ſuperiore aequatione poterit ſerie inuertenda elici x per ſeriem. Fiet autem $\sqrt{x} = \frac{t\sqrt{g}}{4} - \frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15.k^2} + \frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15.k^2} -$ etc. et conſequenter $x = \frac{gt^2}{2^4} - \frac{g^3t^6}{2^{16}.15k^2} + \frac{g^5t^{10}}{2^{26}.225k^4} -$ etc.

Corollarium 3.

455. Differentia inter tempus deſcenſus et tempus aſcenſus erit ergo $\frac{x\sqrt{x}}{2k\sqrt{g}}-\frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{g}}$ quam proxime. Inuenta ergo altitudine x ſimul et tempus aſcenſus et tempus deſcenſus innoteſcunt.

Corollarium 4.

456. In ſerie erit etiam altitudo debita celeritati, qua corpus aſcenſum inchoat $=gx+\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}+\frac{gx^4}{24k^3}+$ etc. et altitudo debita celeritati, qua corpus delabitur $=gx-\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}-\frac{gx^4}{24k^3}+$ etc.

Exemplum.

457. Globus ferreus ex tormento bellico ſurſum exploſus recidebat in terram poſt 34 minuta ſecunda, eratque $k=2250000$ ſcrupulorum pedis Rhenani, et $g=\frac{7499}{7500}$. Habebimus ergo $t=8500$, et $\frac{t\sqrt{g}}{4\sqrt{k}}=1,416572$, adeoque $\frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15k^2\sqrt{k}}=0,01188$. Atque $\frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15k^4\sqrt{k}}=0,0007477$. Fiet igitur $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}=1,405439$, et $\sqrt{x}=2108,159$, et tota altitudo x ad quam globus in aere peruenit $=4443$ ped. Rhen. Sit nunc δ numerus minutorum ſecundorum, quibus deſcenſus longius durat quam aſcenſus; erit $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}}=\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}}-\frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}$. Eſt vero $\sqrt{\frac{x}{k}}=\frac{527}{375}$, ex quo prodit $\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}}=0,9913$, et $\frac{x^3\sqrt{y}}{672k^3\sqrt{k}}=0,01893$. Habebimus ergo $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}}=0,97237$, et hinc $\delta=5'',50'''$. Ex quo apparet tempus aſcenſus fuiſſe $14''$,

5''',

5‴, et tempus deſcenſus $=19''$, $55'''$. Altitudo autem generans celeritatem, qua corpus aſcenſum inchoauit reperitur 15542 ped. et altitudo debita celeritati, qua delabitur $=1969$ ped. Videatur de his Comment. Tom. II. pag. 338.

Corollarium 5.

458. Quia altitudo celeritati, qua corpus ſurſum proiicitur $=gk(e^{\frac{x}{k}}-1)=gx(1+\frac{x}{2k}+\frac{x^2}{6k^2}+\frac{x^3}{24k^3}$ $+$ etc.). Erit tempus aſcenſus et deſcenſus ſimul ſumtum, ſi corpus hac celeritate in vacuo ſurſum proiiceretur ſola ſollicitante vi grauitatis, $=4\surd gx$ $+\frac{x\surd gx}{1}+\frac{5x^2\surd gx}{24k^2}+\frac{x^3\surd gx}{32k^3}+$ etc.

Corollarium 6.

450. Erit ergo ſumma temporum aſcenſus et deſcenſus in vacuo ad temporum ſummam in medio reſiſtente vt $g(1+\frac{x}{4k}+\frac{5x^2}{96k^2}+\frac{x^3}{124k^3}+$ etc.) ad $1+\frac{x^2}{480k^2}-\frac{x^4}{92160k^4}$ etc. Si ſcilicet in vtroque caſu corpus eadem celeritate proiiciatur.

Scholion 3.

460. In citato Tomo II. Commentar. pag. 340 eſt Theorema, quo haec tempora in vacuo et medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione, vt hic quoque ſtatuimus, inter ſe conferuntur; atque aſſeritur tempus in vacuo ſemper eſſe maius tempore in pleno. At vero ex noſtra comparatione apparet, fieri poſſe, vt tempus in vacuo etiam minus ſit tempore in pleno. Nam ſi fuerit x valde paruum k vero vehementer magnum, ea tempora in-

inter ſe erunt proxime vt g ad 1. Eſt vero g in medio reſiſtente ob vim grauitatis denſitate medii minutam ſemper minor vnitate, et hanc ob rem tempus in vacuo minus erit his caſibus tempore in pleno. Quando vero g quam minime ab vnitate differt et x non eſt admodum paruum reſpectu k, prout in eiaculatione globorum ex tormentis euenit, tempus in vacuo vtique perpetuo erit maius quam in medio reſiſtente. Deinde ſi fuerit $x > k$ facile perſpicitur, dari quoque caſus, quibus euentus illi Theoremati futurus ſit contrarius. In cxemplo autem allato corpus celeritate altitudini 15542 ped. debita in vacuo ſurſum proiectum recidet in terram poſt 63 minuta ſecunda, cum tamen in aere non diutius quam 34″ moretur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula IV. Fig 6. 461. *Si corpus poſt quemuis deſcenſum ex* O *reflectatur eaque celeritate, quam in deſcenſu eſt adeptum iterum recta aſcendat, atque hae reflexiones perpetuo, cum in* O *peruenerit repetantur; quaerendae ſunt altitudines* OA, OB, OC *etc. quas corpus hoc modo ſucceſſiue percurrit in medio reſiſtente vniformi iuxta quadrata celeritatum et ſollicitatum a potentia vniformi* g.

Solutio.

Poſito, vt hactenus eſt factum, exponente reſiſtentiae $= g$, altitudo prima AO$= a$, eritque celeritati, qua corpus aſcenſum inchoauit, altitudo de-

debita $= gk(e^{\frac{a}{k}} - 1)$ (439). Altitudo vero debita celeritati, qua per AO delapſum punctum O attingit eſt $= gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})$ (420). Hac celeritate iam ſecundum ascenſum per OB incipiat, ſitque OB $= z$, erit $gk(1 - e^{\frac{-a}{k}}) = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$. Ex quo prodit OB $= kl(2 - e^{\frac{-a}{k}}) = z$. Altitudo vero debita celeritati, qua in hoc ſecundo descenſu per BO delabitur, erit $= gk(1 - e^{\frac{-z}{k}}) = \frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{2 - e^{\frac{-a}{k}}}$, hacque celeritate tertium ascenſum per OC incipiet. Sit nunc OC $= z$, erit $\frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{2 - e^{\frac{-a}{k}}} = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$, conſequenter $z = \text{OC} = kl \frac{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}{2 - e^{\frac{-a}{k}}}$. Celeritas vero, quam in descenſu per CO acquirit, debita erit altitudini $gk(1 - e^{\frac{-z}{k}}) = \frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}$. Hac porro celeritate quartum ascenſum per OD incipit, quam altitudinem OD denuo vocemus z, erit $gk(e^{\frac{z}{k}} - 1) = \frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}$ et conſequenter $z = \text{OD}$

 $= kl$

$= kl\frac{4-3e^{\frac{-a}{k}}}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Simili modo prodibit altitudo quinta OE $= kl\frac{5-4e^{\frac{-a}{k}}}{4-3e^{\frac{-a}{k}}}$, et ſexta OF $= kl\frac{6-5e^{\frac{-a}{k}}}{5-4e^{\frac{-a}{k}}}$. Ex quibus concluditur ea altitudo OP, cuius index eſt n, fore $= kl\frac{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}{(n-1)-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = kl\frac{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$. Manifeſtum igitur eſt ad quantam altitudinem corpus in quaque reflexione ex puncto O perueniat. Q. E. I.

Corollarium I.

462. Ex hac ſolutione ſimul perſpicitur celeritati, qua in hoc deſcenſu per PO delabitur, debitam altitudinem fore $= \frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}$. Celeritas vero, qua aſcenſum per OP eſt adorſum, debita eſt altitudini $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-1-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$

Corollarium 2.

463. Quia $OA = a = kle^{\frac{a}{k}}$ et $OB = kl(2-e^{\frac{-a}{k}})$, erit $OA + OB = kl(2e^{\frac{a}{k}}-1)$. Eodemque modo OA

$OA + OB + OC = kl(3e^{\frac{a}{k}} - 2)$, et $OA + OB + OC + OD = kl(4e^{\frac{a}{k}} - 3)$ etc.

Corollarium 3.

464. Si k eſt numerus valde magnus, vt $\frac{a}{k}$ fere euaneſcat, erit quam proxime $OP = a - \frac{(n-1)a^2}{k} + \frac{(n-1)^2a^3}{k^2} - \frac{(n-1)^3a^4}{k^3} +$ etc. Quae ſeries cum ſit geometrica erit $OP = \frac{ak}{k+(n-1)a}$ q. p.

Corollarium 4.

465. Si altitudo prima OA fuerit infinite magna reliquae nihilo minus erunt finitae. Prodibit enim $OB = kl2$, $OC = kl\frac{3}{2}$, $OD = kl\frac{4}{3}$, etc. OP $kl\frac{n}{n-1}$.

Corollarium 5.

466. Et, ſi altitudo quaecunque fuerit $= klA$ erit altitudo ſequens, ad quam corpus poſt repercusſionem e prima pertingere valet $= kl\frac{2A-1}{A}$. Porro altitudo tertia erit $= kl\frac{3A-2}{2A-1}$ et ſimiliter quarta $= kl\frac{4A-1}{3A-1}$ et ea cuius index eſt n erit $= kl\frac{nA-n+1}{(n-1)A-n+2}$.

Scholion 1.

467. Poſſunt etiam loco n numeri negatiui ſubſtitui, tumque inuenientur altitudines praecedentes in quarum ſerie prima exiſtit. Sic altitudo, quam ſequitur prima $OA = a$, poſito $n = o$, erit $= kl\frac{1}{2-e^{\frac{a}{k}}}$. Ex quo apparet, ſi fuerit $e^{\frac{a}{k}} = 2$ ſeu

 $a =$

$a = kl2$, altitudinem praecedentem fuiſſe infinitam. At ſi fuerit $e^{\frac{a}{k}} > 2$, altitudo praecedens ob logarithmum quantitatis negatiuae erit imaginaria, id quod indicat, fieri non poſſe, vt altitudo tanta poſſit aſſignari, cuius ſequens ſit haec aſſumta *a*.

Scholion 2.

468. Quod poſt altitudinem infinitam ſequi poſſit altitudo finita admirabile quidem videtur; ſed conſideranti, quod corpus in medio reſiſtente ex infinita altitudine delapſum finitam acquirat tantum celeritatem, (420) ratio huius phaenomeni facile patebit. Hac enim finita celeritate ad finitam tantum altitudinem reaſcendere poterit. Maxima autem celeritas, quam corpus in deſcenſu poteſt adipiſci, eſt $\sqrt{gk}$. Quare ſi corpus initio ſurſum proiiciatur celeritate maiore quam $\sqrt{gk}$ haec eeleritas ex nullo quamuis magno deſcenſu antecedente generari potuit; quemadmodum etiam hoc caſu calculus altitudinem praecedentem exhibet imaginariae quantitatis.

PROPOSITIO 59.
Problema.

Tabula IV. Fig. 3. et 4. 469. *Reſiſtente medio vniformi in celeritatum ratione ſimplici, et ſollicitante potentia abſoluta vniformi deorſum tendente, determinare corporis recta vel aſcendentis vel deſcendentis celeritatem in quouis puncto.*

So-

Solutio.

Tabula IV Fig. 3.

Deſcendat primo corpus in recta AP, ſitque celeritas eius initialis in A debita altitudini c. Ponatur potentia abſoluta $=g$, exponens reſiſtentiae $=k$; atque AP$=x$, et altitudo debita celeritati in P$=v$. His poſitis erit $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, eſt enim vis reſiſtentiae $=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $dx=\frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fiat $\sqrt{v}=u$, erit $dv=2udu$, atque $dx=\frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}=-2du\sqrt{k}+\frac{2gkdu}{g\sqrt{k}-u}$. Integrata hac aequatione prodit $x=C-2u\sqrt{k}-2gkl(g\sqrt{k}-u)=C-2\sqrt{kv}-2gkl(g\sqrt{k}-\sqrt{v})$. Poſito vero $x=0$ fieri debet $v=c$, ex quo fit $C=2\sqrt{kc}+2gkl(g\sqrt{k}-\sqrt{c})$. Habebimus itaque $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}+2gkl\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, ex qua v ope logarithmicae poteſt deduci Q. E. Alterum.

Fig. 4.

Iam pro aſcenſu ſit celeritas initialis in B altitudini c debita, et BP$=x$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Quia in aſcenſu tam potentia abſoluta, quam reſiſtentiae vis retardant, erit $dv=-gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quae aequatio directe ex priore $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ deducitur ponendo $-g$ loco g. Quamobrem etiam hoc modo requiſitam aequationem integralem ex illa deriuare licet. Fit igitur facto g negatiuo $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}-2gkl\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum.

Corollarium I.

470. Si celeritas initialis in deſcenſu fuerit Fig. 3. $=0$, erit $x=-2\sqrt{kv}+2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Ex qua aequatio-

Bb 3

tione determinatur celeritas corporis ex quacunque altitudine delapſi.

Corollarium 2.

471. Quia vero eſt $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = -l(1-\frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}})$; habebitur in ſerie $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}} + \frac{v}{2g^2k} + \frac{v\sqrt{v}}{3g^3k\sqrt{k}} + \frac{v^2}{4g^4k^2}$ + etc. Qua ſubſtituta prodibit $x = \frac{v}{g} + \frac{2v\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{v^2}{2g^3k} + \frac{2v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si nunc fuerit k numerus valde magnus erit $v = gx - \frac{2x\sqrt{gx}}{3\sqrt{k}}$ q. p.

Corollarium 3.

Tabula IV. Fig. 4.

472. Si fit $v = g^2k$, prodit $x = \infty$. Ex quo apparet, corpus ex infinita altitudine delapſum maiorem acquirere non poſſe celeritatem quam $g\sqrt{k}$. Et ſi fuerit ſemel $v = g^2k$, corpus motu aequabili eſſe progreſſurum; tum vero motum eius retardari, ſi ſit $v > g^2k$.

Corollarium 4.

473. Si corpus ex B ſurſum proiiciatur celeritate $\sqrt{c}$, altitudo BA reperietur facto $v = 0$. Prodibit autem $BA = 2\sqrt{kc} - 2gkl(1 + \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} - \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k}$. Altitudo vero ex qua corpus descendendo hanc celeritatem acquirere poteſt erit $= -2\sqrt{kc}$ $2gkl(1 - \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} + \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k}$ + etc.

Corollarium 5.

474. Si corpus ſurſum proiiciatur celeritate $g\sqrt{k}$, maxima ſcilicet, quam deſcenſu acquirere poteſt, erit altitudo ad quam pertingit $= 2gk(2 - l2)$.

PRO-

PROPOSITIO 60.

Problema.

475. *Reſiſtente medio vniformi in ratione ſimplici celeritatum et ſollicitante potentia abſoluta vniformi; determinare tempus, quo corpus vel aſcendens vel deſcendens ſpatium quoduis percurrit.*

Solutio.

Poſitis vt ante pro deſcenſu per AP celeritate in A$=\sqrt{c}$, et ea in P$=\sqrt{v}$; exponente reſiſtentiae $=k$ et potentia abſoluta $=g$, ſpatioque AP$=x$, erit $dx=\frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}=\frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$ poſito u^2 loco v. Iam dicto tempore per AP$=t$ erit $dt=\frac{dx}{u}=\frac{2du\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$. Ex qua prodit $t=2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Tabula IV. Fig. 3.

Quia aſcenſus per BP$=x$, cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ prodit ponendo $-g$ loco g, erit tempus aſcenſus per BP$=2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Problemate vero praecedente definitur v ex dato x. Quare et hic tempus, quo ſpatium quoduis percurritur poterit cognosci. Q. E. I. Fig. 4.

Corollarium I.

476. Si celeritas initialis, qua corpus deſcendit fuerit nulla, erit tempus deſcenſus per ſpatium AP$=2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. At v definitur ex hac aequatione $x=-2\sqrt{kv}+2gk\,l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fig. 3.

Co-

Corollarium 2.

477. Tota altitudo BA, ad quam corpus ex B aſcendens peruenire poteſt, abſoluetur tempore $= 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$.

Corollarium 3.

478. Si ergo celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit infinita, erit etiam tempus, quo tota altitudo BA percurritur, infinitum, nempe $= 2\sqrt{k}\, l\infty$.

Scholion 1.

479. Hoc igitur vehementer differt haec reſiſtentiae hypotheſis a priore, quae quadratis celeritatum poſita erat proportionalis. Nam illo caſu corpus infinita celeritate ſurſum proiectum ad ſummum punctum pertingit tempore finito (444). Hoc vero notandum eſt tempus $2\sqrt{k}l\infty$ eſſe numerum infinitum infimi ordinis: Ex quo concludi poſſe videtur; ſi reſiſtentia fuerit in maiore quam ſimplici ratione celeritatum, tempus aſcendens totius ſemper eſſe finitum. Sin autem reſiſtentia ſit in ſimplici vel minore celeritatum ratione, tempus aſcenſus totius eſſe infinitum, ſi quidem celeritas initialis eſt infinite magna.

Scholion 2.

490. Has duas reſiſtentiae hypotheſes ideo fuſius pertractandas eſſe cenſui, quod eae a *Neutono*, aliisque, qui eum ſecuti ſunt, praecipue ſint conſideratae. Haec quidem poſterior hypotheſis, qua reſiſtentiam celeritatibus proportionalem poſuimus, me-

mere mathematica eſt, neque vllum in phyſicis habere poteſt vſum. Sed quia initio putarunt, reſiſtentiam fluidorum a tenacitate oriundam celeritatibus eſſe proportionalem, diligentius in huiusmodi motus inquirendum eſſe exiſtimauerunt. Poſtmodum tamen, cum reſiſtentiam tenacitatis longe aliter ſe habere intellexiſſent, hanc tractationem nihilo minus retinuerunt. Prior vero, qua reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis eſt, maxime explorari meretur: certum enim eſt praecipuam fluidorum reſiſtentiam hanc tenere rationem. Praeterea etiam haec hypotheſis in calculo prae reliquis tantam habet praerogatiuam, vt, quod in aliis hypotheſibus minime poteſt praeſtari, in hac tamen ſola calculus non refragetur. Omnia enim fere problemata, quae in vacuo ſolutionem non reſpuunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi reſolui poſſunt. Hanc ob rem in ſequentibus iſtam reſiſtentiam potiſſimum examinabimus, reliquas autem, niſi concinno computo qnaeſitum inueniri poteſt, plerumque negligemus.

PROPOSITIO 61.
Problema.

481. *Reſiſtat medium vniforme in ratione quacunque multiplicata celeritatum, ſitque potentia ſollicitans vniformis; determinari oportet motum corporis recta vel aſcendentis vel deſcendentis.*

Solutio.

Tabula IV. Fig. 3. Conſideremus primo deſcenſum, et ponamus celeritatem in A$=\sqrt{c}$, ſpatium iam percurſum AP$=x$ et celeritatem in P$=\sqrt{v}$. Sit reſiſtentiae exponens $=k$ et lex reſiſtentiae $=v^m$, atque potentia abſoluta $=g$. His igitur poſitis erit $dv=g\,dx-\frac{v^m dx}{k^m}$, et $dx=\frac{k^m dv}{g\,k^m-v^m}$. Habemus ergo $x=\int\frac{k^m dv}{g\,k^m-v^m}$ ex qua ope quadraturarum v in x determinari poterit. Ponatur tempus, quo ſpatium AP percurritur $=t$, erit $dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{k^m dv}{g\,k^m\sqrt{v}-v^m\sqrt{v}}$. Atque $t=\int\frac{k^m dv}{gk^m\sqrt{v}-v^m\sqrt{v}}$ Q. E. Alterum.

Iam pro aſcenſu maneat $\sqrt{c}$ celeritas initialis in B, ſitque BP$=x$, et celeritas in P$=\sqrt{v}$, atque tempus, quo ſpatium BP percurritur $=t$. His poſitis erit $dv=-g\,dx-\frac{v^m d\,x}{k^m}$ quae aequatio ex illa elicitur ponendo $-g$ loco g. Quo facto erit pro aſcenſu $x=-\int\frac{k^m dv}{gk^m+v^m}$ et $t=-\int\frac{k^m dx}{g\,k^m\sqrt{v}+v^m\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum inueniendorum.

Corollarium I.

482. Si fuerit $c^m=gk^m$, corpus hac celeritate deſcendens motu aequabili feretur. Nam perpetuo potentiae abſolutae, qua corpus acceleratur, aequalis erit vis reſiſtentiae, qua retardatur.

Co-

Corollarium 2.

483. Corpus vero ex quiete delapſum perpetuo accelerabitur, neque tamen vnquam celeritatem acquiret altitudini $g^{\frac{1}{m}}k$ debitam. Sed haec celeritas eſt quaſi aſſymtotos, quam ſiue celerius ſiue tardius corpus moueatur, affectat.

Scholion.

484. Quia hac inuentae aequationes neque integrari poſſunt, neque v vel t in x definiri, diutius iis immorari non expedit. Ad alia igitur progredior, atque medium reſiſtens variabile contemplabor manente potentia abſoluta vniformi. Huiusmodi tamen accipiam hypotheſin, qua aequatio dv determinans fiat homogenea, ideoque his difficultatibus non ſit obnoxia. Deinde potentiam abſolutam non amplius vniformem ſed variabilem pono, ſeu eius loco vim centripetam conſidero, qua corpus perpetuo ad certum aliquod punctum fixum attrahitur. Cum hac quidem primum aliam reſiſtentiam non coniungam, niſi quae quadratis celeritatum eſt proportionalis. Deinde vero cum aliis reſiſtentiae hypotheſibus eas tantum vires centripetas coniungi conuenit, quae integrationem aequationis differentialis admittunt.

PROPOSITIO 62.

Problema.

485. *Potentia abſoluta exiſtente vniformi, et exponente reſiſtentiae diſtantiis a puncto* C *proportionali,* Tabula IV. Fig 7.

 at-

atque lege reſiſtentiae celeritatum ratione quacunque multiplicata, requiritur corporis in recta AC *ad* C *vel accedentis vel ab eo recedentis celeritas in quouis loco.*

Solutio.

Potentia vniformis ad C vrgens ſit $=g$ altitudo debita celeritati in loco quocunque P$=v$. Ponatur AC quae eſt maxima altitudo ad quam corpus pertingit $=a$ et CP$=x$, erit exponens reſiſtentiae vt x, ſit is $\lambda^{\frac{1}{m}}x$ et lex reſiſtentiae ſit v^m. His poſitis erit vis reſiſtentiae$=\frac{v^m}{\lambda x^m}$, et pro aſcenſu per CA, quo et potentia abſoluta et vis reſiſtentiae retardant, habebitur iſta aequatio $dv=-gdx-\frac{v^m dx}{\lambda x^m}$. Deſcenſum hic quoque tanquam aſcenſum conſideremus, et quia in deſcenſu vero potentia accelerans, reſiſtentia vero retardans eſt, in hoc aſcenſu ſubſtituto contrario modo potentia retardans et reſiſtentia accelerans poni debet (411), ex quo oritur pro deſcenſu haec aequatio $dv=-gdx+\frac{v^m dx}{\lambda x^m}$. Quae aequatio ex illa deriuatur faciendo λ negatiuum, et hanc ob rem alteram tantum aequationem integrari opus eſt. Sumamus aequationem pro deſcenſu, quae erit huiusmodi $\lambda x^m dv+\lambda g x^m dx=v^m dx$, et ponamus $v=xz$. Erit ergo $dv=xdz+zdv$, ex quo prodibit iſta aequatio, $\lambda x^{m+1}dz$

$+\lambda x$

$+\lambda x^m z dx + \lambda g x^m dx = x^m z^m dx$. Quae diuiſa per $x^{m+1}(z^m - \lambda z - \lambda g)$ abit in hanc $\frac{\lambda dz}{z^m - \lambda z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$ in qua indeterminatae iam ſunt ſeparatae. Haec igitur aequatio ita integretur, vt facto $x = a$, celeritas euanescat; quo facto ex aequatione integrali celeritas corporis descendentis in quouis loco innotescet. Eadem vero ipſa aequatio facto λ negatiuo inſeruiet ad celeritates in aſcenſu per CA definiendas. Q. E. I.

Corollarium 1.

486. Si fuerit $m = 1$ ſeu reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $\frac{\lambda dz}{(1-\lambda)z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$, adeoque $\frac{\lambda}{1-\lambda} l((1-\lambda)z - \lambda g) = lx + C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l \frac{(1-\lambda)v - \lambda g x}{x}$ ſubſtituo $\frac{v}{x}$ loco z. Quia autem ſi $x = a$ debet eſſe $v = o$, erit $C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l - \lambda g - la$, ideoque $lx = la + \frac{\lambda}{1-\lambda} l \frac{\lambda g x - (1-\lambda)v}{\lambda g x}$. Ex qua prodit $v = \frac{\lambda g x}{\lambda - 1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}\right)$

$= \frac{\lambda g}{\lambda - 1}(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} x^{\frac{1}{\lambda}} - x)$.

Corollarium 2.

487. Si fuerit λ vnitate minor, haec aequatio ad aliam formam redigi debet; Prodibit autem

$$v = \frac{\lambda g}{1-\lambda}\left(\frac{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} x - x^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}\right).$$

Corollarium 3.

488. Caſus, quo $\lambda = 1$, ſeu exponens reſiſtentiae ipſi diſtantiae a puncto C eſt aequalis, in his formulis non continetur, ſed ex differentiali $\frac{-dz}{g} = \frac{dx}{x}$ eſt deducendus. Prodibit autem $C - \frac{z}{g} = lx$ hincque $v = gx(la - lx)$.

Corollarium 4.

489. Ex his intelligitur caſu $m = 1$ corporis deſcendentis celeritatem tam in A quam in C fore $= o$. Fit enim $v = o$ in tribus hiſce aequationibus, tam poſito $x = o$ quam $x = a$. Corpus igitur ex A in C delapſum omnem motum amittet atque in C perpetuo quieſcet, ob reſiſtentiam in eo loco infinite magnam.

Corollarium 5.

490. Dum igitur corpus rectam AC percurrit, alicubi inter A et C habebit celeritatem maximam, quae inuenitur ex aequatione differentiali faciendo $dv = o$. Fiet autem tum $v = \lambda g x$, quo valore loco v in integratis aequationibus ſubſtituto prodibit $\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$, atque $x = \frac{a}{\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}$, ſi $\lambda > 1$. Sin autem $\lambda < 1$ erit $x = \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} a$. At ſi $\lambda = 1$; erit $1 = la - lx$ ideoque $x = \frac{a}{e}$, denotante e numerum, cuius logarithmus eſt vnitas.

Scho-

Scholion 1.

491. Ex his colligere licet etiam in reliquis reſiſtentiae hypotheſibus celeritatem corporis, cum ad C peruenerit, eſſe euanituram. Vis enim reſiſtentiae eſt $\frac{v^m}{\lambda x^m}$, quae ergo fit infinita ſi $x=o$. Quare ſi corpus in C quandam haberet velocitatem, ea a vi reſiſtentiae infinita ſtatim in nihilum redigi deberet. Maximam vero in deſcenſu celeritatem habebit quando eſt $v^m=\lambda g x^m$. Ex quo apparet maximam celeritatem eſſe debitam altitudini $x\sqrt[m]{\lambda g}$. Sed quia x ignoratur ſeu locus, quo corpus celerrime deſcendit, etiam ipſa celeritas non poteſt determinari, niſi per quadraturas curuarum, quarum ope aequatio differentialis conſtruitur.

Corollarium 6.

492. Pro aſcenſu ex C in A ſi $m=1$ celeritates corporis in ſingulis locis P determinabuntur ex hac aequatione $v=\frac{\lambda g x}{\lambda+1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}-x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\right)$, quae ex illis pro deſcenſu formatur, facto λ negatiuo, vti oportet.

Corollarium 7.

493. In aſcenſu ergo corporis celeritas in C ſemper eſt infinita. Facto enim $x=o$, quia $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ eſt vnitate maius, denominator euaneſcit.

Scho-

Scholion 2.

494. Perſpicuum etiam eſt ex ſola contemplatione, celeritatem in C eſſe debere infinitam. Nam niſi tanta eſſet, corpus vim reſiſtentiae in C infinitam ſuperare non poſſet, ſed perpetuo in C haerere deberet.

PROPOSITIO 63.

Theorema.

495. *Iisdem poſitis, quae in praecedente propoſitione, ſi plura corpora ex diuerſis diſtantiis ad punctum C accedant, erunt tempora, quibus eo perueniunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum.*

Demonſtratio.

In ſolutione praecedentis problematis ad celeritatem in P determinandam obtinuimus hanc aequationem, $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, (485). In qua aequatione x et v vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Eius igitur integralis ita accepta, vt poſito $x = a$ fiat $v = o$, habebit hanc proprietatem, vt x, v et a vbique eundem dimenſionum numerum conſtituant. Ex ea ergo prodibit v aequalis functioni cuidam ipſarum a et x, in qua a et x vnicam vbique dimenſionem conſtituunt; ſeu v erit functio ex a ex x conſtans vnius dimenſionis. Quare in elemento temporis per CP quod eſt $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit ipſarum x, dx, et a dimidia dimenſio, et hanc ob rem tempus per CP aequabitur functioni ex a et x conſtanti dimidiae dimenſionis. Poſito ergo $x = a$,

quo

quo caſu totum tempus deſcenſus per AC inuenitur, habebitur functio ipſius ſolius a dimidiae dimenſionis. Quamobrem tempus per AC exprimetur huiusmodi expreſſione $C\sqrt{a}$ in qua C ex quantitatibus λ, m et g conſtat, non vero pendet ab a. Quia iam a denotat altitudinem AC, perſpicuum eſt plurium deſcenſuum tempora eſſe inter ſe in ſubduplicata ratione altitudinum percurſarum. Q. E. D.

Corollarium 1.

496. Simili modo intelligitur plurium aſcenſuum ex C tempora tenere etiam rationem altitudinum, ad quas peruenitur, ſubduplicatam.

Corollarium 2.

497. In quacunque igitur multiplicata celeritatum ratione medium reſiſtat, dummodo potentia abſoluta eſt conſtans et reſiſtentiae exponens diſtantiis a C proportionalis, tempora vel aſcenſuum vel deſcenſuum rationem tenent ſubduplicatam altitudinum.

Scholion 1.

498. Neque vero aſcenſus cum deſcenſibus comparare licet, neque plures aſcenſus vel deſcenſus inter ſe, in quibus litterae λ, m et g non eosdem tenent valores. Nam in expreſſione $C\sqrt{a}$, quantitas C in omnibus caſibus, qui inter ſe comparantur, eadem eſſe debet.

Scholion 2.

499. In hac propoſitione eadem vſi ſumus methodo varia deſcenſuum ad punctum fixum tempora comparandi, quam ſupra in propoſitionibus 39 et 46. Hoc autem caſu eo magis huius methodi praeſtantia cernitur, quia nequidem celeritatem in x determinare licebat. Hoc enim ſolum nobis perſpicere ſufficiebat, cuiusmodi functio ipſarum a et x futura ſit ea expreſſio, cui v eſſet aequalis. In ſequentibus autem plura ſpecimina egregia huius methodi occurrent.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tabula IV. Fig. 7. 500. *Exiſtente vi centripeta cuicunque poteſtati diſtantiarum a centro* C *proportionali, medioque uniformi reſiſtente in duplicata celeritatum ratione; determinare corporis in recta* AC *moti ſiue ſurſum ſiue deorſum in ſingulis locis* P *celeritatem.*

Solutio.

Sit corpus in P, habeatque celeritatem altitudini v debitam. Vocetur AP, x, et ſit vis centripeta vt x^n, atque ea diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati $= f$. Deinde ponatur exponens reſiſtentiae k. His praemiſſis erit vis abſoluta, qua corpus in P ſollicitatur $= \frac{x^n}{f^n}$, et vis reſiſtentiae in hoc loco $\frac{v}{k}$, exiſtente vi grauitatis $= 1$.

Des-

Deſcendat iam corpus ad C et habebit, dum per elementum pP mouetur, vim centripetam accelerantem, atque vim reſiſtentiae retardantem. Quia hic autem corpus inuerſe ex P in p peruenire ponimus creſcente x, contrarias harum virium actiones ſtatui oportet, ſeu quod eodem redit dx negatiuum eſt ponendum, quia deſcenſu diſtantia $PC = x$ minuitur. Prodibit ergo $dv = -\frac{x^n}{f^n}dx + \frac{vdx}{k}$. In vero autem corporis aſcenſu per Pp, vtraque vis erit retardans, ideoque habebitur $dv = -\frac{x^n}{f^n}dx - \frac{vdx}{k}$. Ex quo perſpicitur alteram aequationem ex altera oriri faciendo k negatiuum. Hanc ob rem alterutram tantum aequationem integrari opus eſt. Sumamus eam pro aſcenſu $dv = -\frac{x^n dx}{f^n} - \frac{vdx}{k}$, ſeu $dv + \frac{vdx}{k} = \frac{-x^n dx}{f^n}$ haecque multiplicetur per $e^{\frac{x}{k}}$ vt prodeat $e^{\frac{x}{k}}(dv + \frac{vdx}{k}) = -\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$, cuius integralis eſt $e^{\frac{x}{k}} v = -\int \frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$. Erit ergo $v = -e^{\frac{-x}{k}} \int \frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$. Pro deſcenſu igitur erit $v = -e^{\frac{x}{k}} \int \frac{e^{\frac{-x}{k}} x^n dx}{f^n}$. In vtraque vero integratione quantitas conſtans adiicienda ex eo de-

terminari debet, quod corporis moti alicubi celeritas ſit data: alioquin enim motus non eſſet determinatus. Q. E. I.

Corollarium 1.

501. Perſpicitur igitur ſi n fuerit numerus integer affirmatiuus, has formulas fore integrabiles. Eſt enim $\int e^{\frac{x}{k}} x^n dx = k e^{\frac{x}{k}} x^n - nk^2 e^{\frac{x}{k}} x^{n-1} + n(n-1)k^3 e^{\frac{x}{k}} x^{n-2} - n(n-1)(n-2)k^4 e^{\frac{x}{k}} x^{n-3} +$ etc. $+ C$. Quae ſeries non ſit infinita, quoties n eſt numerus integer affirmatiuus.

Corollarium 2.

502. Sit celeritas in C data et debita altitudini c, erit pro aſcenſu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n} - \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} +$ etc. $\pm n(n-1)(n-2) \ldots \ldots 2.\ 1.\ \frac{k^{n+1} e^{\frac{-x}{k}}}{f^n}$; quorum ſignorum ambiguorum ſuperius valet ſi $n+1$ fuerit numerus impar, inferius vero ſi $n+1$ fuerit numerus par. Pro deſcenſu autem erit $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n} + \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} +$ etc. $- n(n-1) \ldots \ldots \ldots 2.\ 1.\ \frac{k^{n+1} e^{\frac{x}{k}}}{f^n}$. Loco C debita ſubſtituta conſtante.

Co-

Corollarium 3.

503. Integrale ipſius $\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$ ita acceptum vt fiat $=o$, facto $x=o$, ponatur $=X$. Eritque $v=e^{\frac{-x}{k}}(c-X)$, quia facto $x=o$, fieri debet $v=c$. Inſeruit quidem haec aequatio aſcenſui, ſed facto k negatiuo ad deſcenſum accommodatur.

Corollarium 4.

504. Cognito X apparebit altitudo CA ad quam corpus vel aſcendere poteſt, vel ex ea delapſum celeritatem acquirit $=\surd c$. Ex hac enim aequatione $X=c$ radix x dabit altitudinem CA.

Corollarium 5.

505. Ex differentiali aequatione pro deſcenſu $dv=-\frac{x^n dx}{f^n}+\frac{vdx}{k}$, apparet alicubi corpus habiturum eſſe celeritatem maximam antequam ad C pertingit, quae ibi erit, vbi eſt $v=\frac{kx^n}{f^n}$, ſi quidem n non eſt numerus negatiuus.

Corollarium 6.

506. Detur altitudo $CA=a$, ex hacque ſi quaeratur c, oportet eam habere quantitatem, quae reſultat in X poſito a loco x. Sit $ea=A$ erit pro aſcenſu $v=e^{\frac{-x}{k}}(A-X)$, et pro deſ-

 cen-

cenſu $v = e^{\frac{x}{k}}(A - X)$. Facto enim $x = a$ debet euaneſcere v. Iam facto $x = o$, quo caſu etiam ſit $X = o$ (503), erit $v = c = A$.

Corollarium 7.

507. Manifeſtum eſt ex hiſce, quomodo tempus quo ſpatium CP percurritur, inueniendum ſit. Scilicet pro aſcenſu erit tempus per CP $= \int \frac{e^{\frac{x}{2k}} dx}{\sqrt{(A - X)}}$ atque pro deſcenſu tempus per CP erit $= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}} \sqrt{(A - X)}}$

Exemplum.

508. Sit vis centripeta vt diſtantia a centro C, quo caſu ſit $n = 1$; Erit ergo pro aſcenſu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{-x}{k}}}{f}$. Pro deſcenſu vero $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{x}{k}}}{f}$ (502). In deſcenſu maxima celeritas erit, vbi eſt $v = \frac{kx}{f}$ (505), qua aequatione cum illa coniuncta habebitur $f e^{\frac{x}{k}} c + k^2 = k^2 e^{\frac{x}{k}}$. Erit ergo $e^{\frac{x}{k}} = \frac{k^2}{k^2 - cf}$ et $x = k\, l \frac{k^2}{k^2 - cf}$. Haec igitur diſtantia ſit infinita ſi $cf = k^2$, omnino vero imaginaria ſi $cf > k^2$. Sit porro in A corporis celeritas $= o$, poſitaque $AC = a$, erit pro aſcenſu celeritatis initialis in C altitudo debita $= \frac{c^{\frac{a}{k}} ka - c^{\frac{a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$.

In

In deſcenſu vero erit celeritatis finalis in C altitudo debita $= -\frac{c^{\frac{-a}{k}} ka}{f} - \frac{c^{\frac{-a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$. Ex qua apparet ſi fuerit a infinitum fore celeritatis vltimae in C altitudinem debitam $= \frac{k^2}{f}$.

PROPOSITIO 65.

Problema.

509. *Exiſtente vi centripeta ad* C *quacunque et medio reſiſtente ſecundum quadrata celeritatum vtcunque difformi: determinare motum corporis recta vel accedentis vel recedentis a* C.

Solutio.

Sit corpus in P, et ponatur $CP = x$, et celeritas in $P = \sqrt{v}$. Deinde ſit vis centripeta in $P = p$, poſita vi grauitatis $= 1$, et exponens reſiſtentiae $= q$, quae litterae p et q denotant functiones quascunque ipſius x. Erit ergo vis reſiſtentiae $= \frac{v}{q}$. Hanc ob rem habebitur pro aſcenſu $dv = -pdx - \frac{vdx}{q}$. Pro deſcenſu vero haec $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$. Quarum altera in alteram transmutatur facto q negatiuo. Conſideremus igitur alterutram tantum aſcenſui accommodatam, quae induit hanc formam $dv + \frac{vdx}{q} = -pdx$. Multiplicetur haec per $e^{\int \frac{dx}{q}}$ vt fiat integralis. Erit autem aequatio integralis $e^{\int \frac{dx}{q}} v = -\int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$; ergo $v = -e^{-\int \frac{dx}{q}} \int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$. Sit corpo-

poris in A, poſita AC$=a$, celeritas nulla, et ſcribatur X loco integralis ipſius $e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$ ita accepti vt euaneſcat facto $x=o$. Deinde loco x poſito a abeat X in A erit $-\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx=A-$X, atque $v=e^{-\int\frac{dx}{q}}$(A$-$X). Tempus igitur quo ſpatium PC abſoluitur eſt $=\int\frac{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}dx}{\sqrt{(A-X)}}$. Pro deſcenſu erit autem ſcripto A$-$X ſimili modo loco $-\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$, altitudo celeritati in P debita $v=e^{\int\frac{dx}{q}}$(A$-$X) et tempus quo ſpatium PC abſoluitur erit $=\int\frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}\sqrt{(A-X)}}$

Q. E. I.

Corollarium 1.

510. Celeritas in puncto infimo C reperietur facto $x=o$, quo caſu et X euaneſcit, et $\int\frac{dx}{q}$ euaneſcere ponamus. Prodibit igitur tam pro aſcenſu quam pro deſcenſu $v=$A. Notandum autem eſt A in vtroque caſu non eundem habere valorem, ſed diuerſum. Formatur enim ex X, quod pro aſcenſu eſt $=\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$, pro deſcenſu vero $=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$.

Corollarium 2.

511. In deſcenſu maximam habebit corpus celeritatem quando eſt $v=pq$, tum enim fit $dv=o$.

Lo-

Locus ergo, in quo celeritas eſt maxima, determinabitur ex iſta aequatione $pq = e^{\int \frac{dx}{q}} (A - X)$.

Scholion.

512. In hypotheſi tam potentiae quam medii vniformis, corpus delapſum ſpatio demum infinito percurſo acquirebat maximam ſuam celeritatem, et ſi principio ea ſtatim promoueatur, eam perpetuo retinebat. Hic vero vbi p et q ſunt quantitates variabiles corpus ex quiete delapſum finito tempore maximam celeritatem acquirere poteſt, neque ſi eam ſemel habuit retinere debet; niſi ſit pq perpetuo quantitas conſtans, ſeu medii denſitas vi centripetae proportionalis (385).

PROPOSITIO 66.

Problema.

513. *Data lege vis centripetae ad centrum* C *trahentis, et medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione; ſi dentur celeritates corporis, quas ex quibuscunque altitudinibus delapſum in* C *acquirit, determinare denſitatem ſeu reſiſtentiae exponentem in ſingulis locis.* Tabula IV. Fig. 8.

Solutio.

Poſita quacunque diſtantia $CP = x$ et vi centripeta in $P = p$; ſit curua CMB huius indolis vt eius applicata quaeuis AB ſit aequalis altitudini debitae celeritati, quam corpus ex A delapſum in C acquirit, quae curua igitur data erit. Exponens vero reſiſtentiae, qui quaeritur, ſit in $P = q$. Sit porro

 diſtan-

diſtantia AC ex qua corpus delabitur $=a$, erit AB certa quaedam functio ipſius a, quam ponamus L. Eiusdem vero curuae applicata PN ſit R, eritque R talis functio ipſius x qualis L eſt ipſius a. Ex praecedente autem propoſitione apparet, corporis ex diſtantia $AC=a$ delapſi altitudinem celeritati in C acquiſitae debitam fore $=A$ (510). Quamobrem erit $L=A$, atque etiam $R=X$, eſt enim quoque X talis functio ipſius x, qualis A eſt ipſius a, R igitur talis eſſe debet functio ipſius x, vt euaneſcat facto $x=0$. Quoniam vero eſt $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$ erit $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$, et $l\frac{pdx}{dR}=\int\frac{dx}{q}$. Ex qua poſito dx conſtante, elicitur $q=\frac{pdxdR}{dpdR-pddR}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

514. Si fuerit CMB linea recta, adeoque $R=\alpha x$, erit $ddR=0$ et $q=\frac{pdx}{dp}$. Si ſit praeterea $p=\mathfrak{C}x^n$ erit $q=\frac{x}{n}$, ſeu medii denſitas erit diſtantiis a centro reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

515. Si fuerit $n=0$ ſeu vis centripeta vbique eadem erit $q=\infty$, ideoque medii denſitas nulla, et ipſa reſiſtentia euaneſcens. Hicque eſt caſus corporis invacuo deſcendentis a potentia abſoluta vniformi ſollicitati.

Corollarium 3.

516. Si fuerit n numerus negatiuus, habebit q quoque valorem negatiuum. Ex quo cognoſcitur

tur reſiſtentiam transmutandam eſſe in vim propellentem.

Scholion I.

517. Ex hisce facile quoque reſoluitur eadem quaeſtio ad aſcenſum accommodata, ſi nimirum detur altitudo, ad quam corpus ex C quacunque celeritate proiectum pertingit. Poſita enim celeritate $=\sqrt{R}$, qua ſpatium x abſoluitur, q tantummodo in ſui negatiuum transmutari debebit, quo facto habebitur $q=\frac{pdxdR}{pddR-dpdR}$.

Scholion 2.

518. Vtraque aequatio definiens q tam pro aſcenſu quam pro deſcenſu ita eſt comparata, vt idem valor ipſius q inueniatur, quaecunque multipla loco p et R accipiantur. Neque tamen ex his concludere licet, ſi determinatae ſint q et p, R vagum quendam habere poſſe valorem: ſed neceſſario debebit eſſe determinatus. Quo autem ille ipſe valor ipſius R, qui eſt aſſumtus, prodeat, non vero eius quoddam multiplum, vis centripeta p ad hoc eſt vel remittenda vel intendenda. Quando autem vis centripetae in ſingulis locis quantitas ipſa datur, problema erit plus quam determinatum, ſi quidem celeritates quibusvis diſtantiis reſpondentes dentur: ſed duntaxat earum ratio propoſita eſſe debet. Ratio vero difficultatis in hoc conſiſtit, quod inuenimus q ex aequatione $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$ bis differentiata. Diffe-

ferentiata enim aequatio latius patet plusque in ſe complectitur quam integralis

Scholion 3.

519. Ex ſolutione problematis ſponte ſequitur, quomodo, ſi data fuerit medii denſitas in ſingulis locis ſeu quantitas q, inueniri oporteat vim centripetam p, reliquis iisdem, quibus ante, manentibus datis. Ex hac enim aequatione $l\frac{pdx}{dR} = \int\frac{dx}{q}$, deducetur $p = \frac{dR}{dx}e^{\int\frac{dx}{q}}$, qui valor eſt determinatus, quia $\int\frac{dx}{q}$ ita ſumtum ponimus, vt euanescat, facto $x = o$ (510).

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tabula IV. Fig. 7. 520. *Reſiſtente medio in duplicata celeritatum ratione, dataque eius denſitate, ſeu exponente reſiſtentiae in ſingulis locis: determinare vim centripetam, quae faciat, vt corpus, ex quacunque altitudine ad centrum* C *delabatur, perpetuo tamen eodem tempore eo perueniat.*

Solutio.

Descendat corpus ex puncto quocunque A ſitque AC $= a$. Vocetur indeterminata CP $= x$ et ponantur altitudo celeritati in P debita $= v$, exponens reſiſtentiae in P $= q$, et vis centripeta ibidem $= p$, quae eſt inuenienda. Habebitur igitur $v = e^{\int\frac{dx}{q}}$ (A−X) et tempus, quo ſpatium PC abſoluitur $= \int$

$= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A-X)}}$, (509). Vbi eſt $X = \int e^{\frac{-dx}{q}}$ pdx ita accepto, vt euaneſcat poſito $x=0$: et A oritur ex X poſito $x=a$. Totum igitur tempus per AC habebitur ſi in integrali ipſius $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A-X)}}$ ponatur $x=a$ vel $X=A$. Expreſſio vero reſultans ita eſſe debebit comparata, vt in ea omnino non inſit a vel A: quod obtinetur, ſi $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A-X)}}$ fuerit functio ipſarum a et x vel ipſarum A et X nullius dimenſionis. Quamobrem et differentialis huiusmodi ſit functio neceſſe eſt. Ponatur igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{dX}{P}$; habebimus pro differentiali temporis $\frac{dX}{P\sqrt{(A-X)}}$, in quo A et X dimenſionem obtinent dimidiam; P ergo, quo nulla adſit dimenſio, quoque dimidiam dimenſionem habere debebit. Sed in P non ineſſe poteſt a vel A, eius enim quantitas a ſolo puncto P pendere debet, non a puncto A. Hanc ob rem erit $P = \frac{\sqrt{X}}{b}$, et elementum temporis $= \frac{bdX}{\sqrt{(AX-XX)}}$, quod requiſitam habet proprietatem. Erit igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, et integratione peracta $2b\sqrt{X} = \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$, quod integrale ita eſſe debet ſumtum, vt

euaneſcat facto $x = o$. Quia autem eſt $X = \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$, habebitur $4b^2 \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx = (\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}})^2$, et hinc differentiando tandem $p = \frac{e^{\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

521. Quia elementum temporis eſt $\frac{bdX}{\sqrt{(AX - XX)}}$ erit tempus, quo ſpatium PC abſoluitur = arcui circuli, cuius ſinus verſus eſt X, exiſtente diametro $= A$, ducto in $\frac{2b}{A}$. Et poſita ratione peripheriae ad diametrum $\pi : 1$, erit tempus totius deſcenſus per $AC = b\pi$, quod eſt conſtans, neque ab a pendens.

Corollarium 2.

522. Quia eſt $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2b\sqrt{X}$ et $e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{dx\sqrt{X}}{bdx}$ erit $p = \frac{Xdx}{b^2 dX}$. Eſtque $X = \frac{1}{4b^2} (\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}})^2$.

Corollarium 3.

523. Sit medium reſiſtens vniforme, et ideo $q = k$; erit $e^{\int \frac{dx}{2q}} = e^{\frac{x}{2k}}$ et $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2k(1 - e^{\frac{-x}{2k}})$. Ex

quo

quo prodibit $p=\frac{k}{b^2}(e^{\frac{x}{2k}}-1)$. Vis igitur centripeta in C erit $=o$.

Corollarium 4.

524. Si q eſt conſtans et $=k$; erit $2b\sqrt{X}=2k(1-e^{\frac{-x}{2k}})$ et $X=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Quia vero X abit in A poſito $x=a$, erit $A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$, atque $v=\frac{k^2}{b^2}e^{\frac{x}{k}}((1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

525. In infimo igitur loco C altitudo celeritati debita erit $=A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$.

Corollarium 6.

526. Maximam habebit corpus celeritatem, vbi eſt $v=pk$. Erit ergo $e^{\frac{-x}{2k}}(1-e^{\frac{-x}{2k}})=(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Ex quo reperitur $e^{\frac{-x}{2k}}=2e^{\frac{-a}{2k}}-e^{\frac{-a}{k}}$, hincque $x=2\,al(2e^{\frac{k}{2k}}-1)$.

Scholion.

527. Si q et k accipiantur negatiua inuenitur lex vis centripetae, quae efficit, vt omnes aſcenſus ex C facti abſoluantur aequalibus temporibus. Hoc

Hoc enim ſemper locum habet, deſcenſum in aſcenſum transmutari vi reſiſtentiae negatiua facta. Quo igitur omnes aſcenſus fiant iſochroni erit $p = \frac{e^{-\int\frac{dx}{2q}}}{2b^2}\int e^{\int\frac{dx}{2q}}dx$. In caſuque medii vniformis erit $p = \frac{k}{b^2}(1 - e^{\frac{-x}{2k}})$.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tabula IV. Fig. 9. 528. *Si vis centripeta ſit diſtantiis a centro C proportionalis, et medium vniforme reſiſtat in ſimplici celeritatum ratione: oportet determinari motum corporis tam recto accedentis ad centrum C, quam recedentis ab eo.*

Solutio.

Sit diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis $= f$, et exponens reſiſtentiae $= k$. Iam accedat corpus in recta AC ad centrum C et ponatur altitudo celeritati, quam C habebit debita $= c$. Hacque celeritate tum vltra C in recta CB recedat a C. Conſideremus primo aſcenſum, et ponamus $CP = x$ et celeritatis in P altitudinem debitam $= v$. His poſitis erit vis centripeta in $P = \frac{x}{f}$, et vis reſiſtentiae $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$; ex quibus oritur iſta aequatio $dv = -\frac{xdx}{f} + \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quo haec aequatio fiat homogenea ponatur $\sqrt{v} = u$ et $\sqrt{k} = h$; erit ergo $dv = 2udu$, et

et $2udu = -\frac{xdx}{f} + \frac{udx}{h}$. Fiat $u = rx$; erit $2r^2xdx + 2rx^2dr = -\frac{xdx}{f} + \frac{rxdx}{h}$, ex qua oritur $\frac{dx}{x} = \frac{2fhrdr}{fr - h - 2fhr^2}$. Quae integrata cum debita adiecta conſtante, et reſtitutis v et k, abit in hanc $\frac{v}{c} - \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$ Si autem $8k > f$ aequatio differentialis ope circuli quadraturae debet conſtrui. Ponatur ſcilicet $h = \frac{1}{4\alpha}$ et $f = \frac{1}{2\beta}$, et habebitur iſta aequatio differentialis $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{dx}{x} + \frac{rdr - \alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} + \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Cuius integralis eſt $C = l\sqrt{(u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2)} + \int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Eſt vero $\int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$, arcusque am tangens $at = \frac{r - \alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$, exiſtente radio $ac = 1$. Poſito ergo $\frac{u}{x}$ loco r, erit $at = \frac{u - \alpha x}{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$. Ad conſtantem C determinandam ponatur $x = 0$ et $u = \sqrt{c}$, quo facto loco $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$ habebitur $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb$. Erit ergo $l\sqrt{c} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb = l\sqrt{(u^2 - \alpha ux + \beta x^2)} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$. Vnde fit $bm = \frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, eſtque bm arcus cuius tangens bs eſt $= \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u - \alpha x}$. Pro receſſu a centro C ſi ponatur, vt ante $CQ = x$, et celeritas in $Q = \sqrt{v}$, retinentibus h, f, k, α, β, r et u eosdem quos ante valores, habebitur $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 + 2\alpha r + \beta}$. Ex qua obtinebitur $bm = -\frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 + 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, eſtque arcus bm tangens $bs = \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u + \alpha x}$. At ſi fuerit $\alpha^2 > \beta$ ſeu $f > 8k$ poterit integratio algebraice exhiberi, erit $\frac{v}{c} + \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$. Re-

Tabula IV. Fig. 10.

ſtat autem caſus quo $\alpha^2 = \beta$, ſeu $f = 8k$ qui ſeorſim pertractari debet. Inuenitur autem pro acceſſu haec aequatio $l\frac{4\sqrt{kv}-x}{4\sqrt{kc}} = \frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$. Atque pro receſſu iſta $l\frac{4\sqrt{kv}+x}{4\sqrt{kc}} = \frac{-x}{4\sqrt{kv}+x}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

Tabula IV Fig. 9. 529. In caſu ergo quo $f = 8k$ ſemper pro acceſſu eſſe debet $4\sqrt{kv} > x$, alioquin $\frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$ aequaretur quantitati imaginariae. Quare niſi $x = o$, non poterit eſſe $v = o$, atque ideo celeritas in C neceſſario debet eſſe $= o$. Quamobrem ſi ea ponatur finita $\sqrt{c}$ initium deſcenſus erit imaginarium.

Corollarium 2.

530. Hoc autem caſu $f = 8k$ receſſus ex aequatione cognoſcitur facto enim $v = o$ inuenitur $l\frac{x}{4\sqrt{kc}} = -1$, hincque $x = BC = \frac{4\sqrt{kc}}{e}$ denotante e numerum cuius logarithmus eſt vnitas. Ergo diſtantia BC eſt proportionalis celeritati in C.

Corollarium 3.

531. Quia igitur, quando reſiſtentia tanta eſt, vt ſit $8k = f$, corpus in acceſſu ad C omnem amittit celeritatem; multo maiore ratione ſi $8k < f$, ſeu reſiſtentia adhuc maior fuerit, corpus ad C accedens omnem celeritatem amittet.

Co-

Corollarium 4.

532. Quare ſi vel $8k = f$ vel $8k < f$, corpus poſt acceſſum ad C in C perpetuo quieſcet, atque his caſibus nullus receſſus ſequi poterit. At ſi reſiſtentia fuerit minor, ſeu $8k > f$, tum corpus accedens in C finitam celeritatem habere poterit, qua deinde a C recedet, atque motu oscillatorio mouebitur.

Corollarium 5.

533. Sin autem $8k > f$ pro acceſſu haec habetur aequatio; arcus cuius tangens eſt $\frac{x\surd(\beta-\alpha^2)}{u+\alpha x} = \frac{\surd(\beta-\alpha^2)}{\alpha} l \surd \frac{u^2-2\alpha ux+\beta x^2}{c}$. Vnde initium acceſſus A inuenitur ponendo $u = 0$, prodit autem arcus cuius tangens eſt $\frac{\surd(8k-f)}{\surd f} = \frac{\surd(8k-f)}{\surd f} l \frac{\surd 2fc}{x}$. Pro receſſu vero ſimiliter inuenitur arcus cuius tangens eſt $\frac{\surd(8k-f)}{\surd f} = \frac{\surd(8k-f)}{\surd f} l \frac{\surd 2fc}{x}$.

Scholion 1.

534. Hinc ſequi videtur diſtantiam BC ſemper aequalem eſſe diſtantiae AC, quia hae duae aequationes inter ſe congruunt. At cum, ſi $8k < f$ nullus omnino detur receſſus, fieri non poteſt, vt, ſi $8k$ aliquantulum tantum maius fuerit quam f, ſpatium receſſus aequale fiat ſpatio acceſſus. Difficultas haec autem tollitur, ſi attendamus innumerabiles arcus eidem tangenti $\frac{\surd(8k-f)}{\surd f}$ reſpondere, quorum

rum alius pro acceſſu alius pro receſſu accipi debet. Ponatur $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}=\tau$, et minimus arcus tangenti τ reſpondens ſit γ; et ſemiperipheria circuli π, erit τ tangens omnium horum arcuum γ, $\pi+\gamma$, $2\pi+\gamma$, $3\pi+\gamma$ etc. nec non horum $-\pi+\gamma$, $-2\pi+\gamma$ etc. Pro receſſu nunc BC ſumi debet arcus γ, eritque $\frac{\gamma}{\tau}=l\frac{\sqrt{2fc}}{BC}$, atque $BC=e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque pro acceſſu ſumi debet arcus $-\pi+\gamma$ fitque $AC=e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Reliqui arcus dant puncta, in quibus corpus circa C oſcillando ſucceſſiue habet celeritatem $=o$. Cum igitur in prima oſcillatione ſit ſpatium acceſſus $=e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$; erit ſpatium acceſſus ſecundae oſcillationis aequale ſpatio receſſus in prima oſcillatione atque ideo $=e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. In tertia oſcillatione erit ſpatium acceſſus $=e^{\frac{-\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque in oſcillatione, quae numero n indicatur eſt ſpatium acceſſus $e^{\frac{-(n-2)\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Hacque ratione cuiuscunque oſcillationis tam ſpatium acceſſus, quam ſpatium receſſus poterit determinari.

Corollarium 6.

535. Quando igitur corpus oſcillationes abſoluit circa centrum C, conſtituent ſpatia acceſſus progreſſionem geometricam, cuius denominator

eſt

eſt $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$. Similemque progreſſionem conſtituunt ſpatia receſſus, atque etiam integra ſpatia ſingulis oscillationibus percurſa.

Scholion 3.

536. Quia aequatio differentialis $2udu = \frac{-xdx}{f} + \frac{udx}{b}$ pro descenſu, et aequatio $2udu = \frac{-xdx}{f} - \frac{udx}{b}$ pro ascenſu eſt homogenea: erit in vtroque caſu u = functioni ipſarum x et a vnius dimenſionis, denotante a maximam a centro C elongationem AC aut BC. Quamobrem in temporis expreſſione $\int \frac{dx}{u}$ nulla inerit dimenſio ipſarum a et x, et ideo omnia tempora tam ascenſuum, quam descenſuum erunt inter ſe aequalia. Integrale enim ipſius $\frac{dx}{u}$, erit functio ipſarum a et x nullius dimenſionis, haecque expreſſio poſito $x = a$ erit aequalis quantitati conſtanti. Simili modo erunt omnium descenſuum tempora vsque ad punctum maximae celeritatis inter ſe aequalia. Diſtantia enim puncti, in quo corpus maximam habet celeritatem, proportionalis eſt ipſi a ſeu maximae elongationi a centro C (528).

PROPOSITIO 69.
Theorema.

537. *Si fuerit vis centripeta vt poteſtas diſtantiae a centro C, cuius exponens eſt* n; *et medi-* Tabula IV. Fig. 7.

um reſiſtat in ratione 2m *multiplicata celeritatum; exponens vero reſiſtentiae ſit proportionalis diſtantiarum a centro* C *poteſtati exponentis* $\frac{mn+m-n}{m}$: *Erunt plurium deſcenſuum vel aſcenſuum tempora in ſpatiorum totorum deſcriptorum ratione* $\frac{1-n}{2}$ *multiplicata.*

Demonſtratio.

Sit AC ſpatium totum vel aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum $=a$, eiusque portio quaecunque CP$=x$, et celeritas corporis in P$=\sqrt{v}$. Ponatur diſtantia f, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis. His poſitis erit vis centripeta in P$=\frac{x^n}{f^n}$, et ſumto pro reſiſtentiae exponente $\lambda^{\frac{1}{m}} x^{\frac{mn+m-n}{m}}$ erit vis reſiſtentiae $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro deſcenſu habebitur iſta aequatio $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} + \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$ pro aſcenſu vero $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} - \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Quae aequationes inter ſe prorſus conueniunt niſi quod λ in altera negatiuum habeat valorem. Ponatur nunc $v = u^{n+1}$, et habebitur $(n+1) u^n du = \frac{x^n dx}{f^u} + \frac{u^{mn+m} dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$, in qua aequatione u et x eundem vbique dimenſionum numerum conſtituunt. Haec vero aequatio ita debet integrari, vt, facto $x=a$, euanescat u. Quam ob rem aequatio integralis ita erit comparata vt a, x et u vbi-

vbique eundem conſtituant dimenſionum numerum. Ex ea igitur reperietur u aequalis functioni ipſarum a et x vnius dimenſionis. Conſequenter aequabitur v functioni ipſarum a et x dimenſionum $n+1$. Quocirca tempus, quo ſpatium PC percurritur, nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit functio ipſarum a et x, quae habebit $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones. Facto deinde $x=a$, quo totum tempus per AC habeatur, prodibit functio ipſius tantum a dimenſionum $\frac{1-n}{2}$. Totum ergo tempus vel aſcenſus vel deſcenſus erit $= A a^{\frac{1-n}{2}}$, vbi A eſt quantitas conſtans ex literis f et λ, quae immutatae manent, vtcunque a varietur. Perſpicuum igitur eſt omnes tam aſcenſus, quam deſcenſus eſſe inter ſe in totorum ſpatiorum deſcriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. Q. E. D.

Corollarium 1.

538. Si medium reſiſtens ſit vniforme, ideoque $mn+m-n=0$, erit $n=\frac{m}{1-m}$, ſeu vis centripeta vt diſtantia eleuata ad $\frac{m}{1-m}$. Tempora vero vel aſcenſuum vel deſcenſuum erunt in ſpatiorum percurſorum ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata.

Corollarium 2.

539. Si fuerit $n=1$, ſeu vis centripeta diſtantiis a centro C proportionalis, erunt omnia tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe aequa-

aequalia. Hoc vero caſu cum reſiſtentiae lex ſit celeritatum poteſtas exponentis $2m$, erit reſiſtentiae exponens vt diſtantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propoſitione inuenimus (536), ſi reſiſtentia ſit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$, et medium vniforme, omnia tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum fore inter ſe aequalia.

Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit conſtans ſeu $n=0$, erunt tempora vel aſcenſuum vel deſcenſuum in ſubduplicata ſpatiorum percurſorum ratione. Exponens vero reſiſtentiae fit diſtantiis a centro C proportionalis. Eundem hunc caſum iam expoſuimus ſupra (495).

Scholion.

542. Hiſce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio reſiſtente; atque iuxta diuiſionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis abſolutis ſollicitatorum.

CA-

CAPUT QUINTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

DEFINITIO 21.

543.

Vis tangentialis eſt potentia corpus, quod lineam curuam AMB *deſcribit, ſollicitans, cuius directio incidit in tangentem* TM*t puncti* M, *in quo corpus, cum ſollicitatur, eſt verſatur.* Tabula IV. Fig. 11.

Corollarium 1.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum M*m* percurrit, alium effectum non exerit, niſi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout ſcilicet corpus trahit vel ſecundum directionem MT vel M*t*.

Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curua mouetur; vis tangentialis directionem ſuam perpetuo mutat, et ſecundum aliam plagam effectum ſuum exerit.

Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per ſe in rerum natura vix vnquam oriri poteſt; nihilo vero minus

eius vſus latiſſime patet. Quamcunque enim potentia ſollicitans habeat directionem, ea ſemper in duas alias poteſt reſolui, quarum alterius directio in tangente ſit ſita.

DEFINITIO 22.

547. *Vis normalis eſt potentia corpus lineam curuam* AMB *deſcribens ſollicitans, cuius directio* MR *eſt normalis in curuae elementum* Mm *ſeu tangentem* MT.

Corollarium 1.

548. Vis igitur normalis corporis celeritatem neque auget neque minuit, quia eius directio MR neque in ſequentia neque in antecedentia vergit (164).

Corollarium 2.

549. In hoc vero eius effectus conſiſtit, vt in ſequentibus oſtendetur, vt corporis tantum directionem immutet, et efficiat, vt corpus, quod per ſe in recta eſſet progreſſurum, in linea curua promoueatur (165).

Scholion 1.

550. Si corpus in eodem plano moueatur, in eoque etiam poſitae ſint potentiarum ſollicitantium directiones; ſingulae potentiae reſolui poſſunt in binas, quarum altera ſit normalis, altera tangentialis, quemadmodum ex principiis ſtaticis apparet. Quare cum virium tangentialis et normalis effectus in corpus determinauerimus, ſimul quoque

cu-

cuiusuis potentiae obliquae effectus innoteſcet. Vocamus autem potentiam ſeu vim obliquam omnes potentias corpus ſollicitantes, quae neque normales ſint neque tangentiales.

Scholion 2.

551. Hinc oritur primaria huius capitis diuiſio. Primo enim eos motus conſiderabimus, quorum ſemitae ſunt in eodem plano, atque ſimul omnes potentiae ſollicitantes in eodem ipſo plano conſtitutae. Deinceps autem de iis motibus explicabimus, quorum ſemitae non ſunt poſitae in eodem plano; ad quos cognoscendos ſingulas potentias in binas reſoluere non ſufficit, ſed eas in ternas reſolui oportet, propter tres ſpatii, in quo corpus mouetur, dimenſiones.

PROPOSITIO 70.

Problema.

552. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, ſollicitatur a duabus potentiis altera normali altera tangentiali: determinare vtriusque effectum in motu corporis alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

Solutio.

Sit corporis elementum Mm deſcribentis celeritas debita altitudini v, et vis normalis ſecundum MR trahens $=N$, et vis tangentialis ſecundum MT trahens $=T$, ponaturque elem. $Mm = ds$ et radius osculi in $M = r$. Ad effectum vis N determinandum, quia eius directio eſt normalis in Mm, vtemur

mur formula §. 165, quae erat $npr = Ac^2$. Haec vero transmutata eſt in hanc $pr = 2Av$ (209). Quod autem hic nobis eſt N, id in citatis locis erat $\frac{p}{A}$, intelligimus enim per N non impreſſionem ſolum potentiae N in corpus, ſed ipſam vim acceleratricem; ſeu potentiam abſolute conſideratam diuiſam per maſſam corporis (218). Quare loco $\frac{p}{A}$ hic ſubſtitui debet N, quo facto habebitur $Nr = 2v$. *Quod erat alterum.* Deinde ad effectum vis tangentialis T determinandum adhibeo canonem §. 166, hunc $Acdc = npds$, ſeu huius loco mutatum $Adv = pds$ (209). Atque ob allegatas rationes hic loco $\frac{p}{A}$ ſubſtituo T, eritque $dv = Tds$. Q. E. *Alterum.*

Corollarium 1.

553. Quia vis grauitatis ponitur 1, erit vis normalis ad vim grauitatis vt altitudo celeritati debita ad dimidium radii oſculi curuae; quae analogia ſequitur ex aequatione $Nr = 2v$.

Corollarium 2.

554. Ex data igitur vi normali et curua quam corpus deſcribit ſtatim innoteſcit corporis celeritas. Nam expreſſa celeritate per $\sqrt{v}$ erit $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Nr}{2}}$.

Corollarium 3.

555. Incrementum vero altitudinis celeritatem exponentis ſemper aequale eſt facto ex vi tan-

tangentiali et ſpatiolo a corpore percurſo. Seu hoc elementum ipſius v eſt ad ſpatiolum deſcriptum ds vt vis tangentialis ad vim grauitatis.

PROPOSITIO 71.

Problema.

556. *Si corpus, dum elementum Mm percurrit, ſollicitetur a potentia quacunque obliqua directionis* MC; *oportet determinari effectum huius potentiae in corporis motu alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

Solutio.

Sit potentia haec obliqua ad corporis grauitatem, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum vt P ad 1, elementum $Mm = ds$, et celeritas in M debita altitudini v. Quia vero obliquitas potentiae MC data eſſe ponitur, angulus CMT datus erit, et propterea triangula CMT, Mmr, quae oriuntur ex C in MT et ex m in MC perpendiculis demiſſis, erunt ſpecie data. Ponamus igitur $Mr = dy$ et $mr = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et ratio inter ds et dx et dy data erit. Conferantur iam cum his, quae ſupra (161, 163) nec non poſtea (203) tradita ſunt. Ea enim prorſus ſimilia ſunt hiſce, de quibus hic quaerimus: hoc tantum differunt, quod hic nobis ſit P:1, quod ibi erat p:A. Hanc ob rem habebimus $dv = Pdy$, et, poſito radio oſculi MR in $M = r$, haec aequatio $Prdx = 2vds$ (208), ſcripto P loco $\frac{p}{A}$. Harum aequationum illa $dv = Pdy$ definit celeritatis incrementum, dum corpus elementum Mm

 per-

percurrit. Altera vero $Prdx = 2vds$ ſeu $\frac{2vds}{Pdx}$ exhibet lineae a corpore deſcriptae curuaturam in M. Innoteſcit ergo totus potentiae obliquae effectus in corpus motum. Q. E. I.

Corollarium 1.

Tabula IV. Fig. 12. 557. Si potentia obliqua conſtituit angulum obtuſum cum elemento Mm, omnia manent vt ante, niſi niſi quod lineola $mr = dy$ accipi debeat negatiua. Erit ergo $dv = -Pdy$, et altera aequatio $Prdx = 2vds$ vt ante.

Corollarium 2.

558. Si ergo potentiae directio MC intra normalem MR et elementum Mm cadit, vt in fig. 11. motus corporis acceleratur. At ſi CM extra vtramque cadit, vt in fig. 13. motus retardatur.

Corollarium 3.

Fig. 11. 559. Si directio potentiae MC incidit in tangentem MT, euaneſcit angulus mMr, et fit $Mr = Mm$ ſeu $dx = 0$ et $dy = ds$. Habebitur itaque $dv = Pds$, et $r = \infty$, id quod indicat corporis directionem ab hac potentia tangentiali non affici.

Corollarium 4.

Fig. 12. 560. Si directio potentiae MC incidit in alteram partem Mt, quo caſu fit $Mr = dx = 0$, et $dy = ds$, erit $dv = -Pds$ et $r = \infty$ vt ante. Vis igitur tangentialis celeritatem corporis tantum afficit, directionem vero prorſus non immutat (544).

Co-

Corollarium 5.

561. Incidat potentiae directio MC in normalem MR, quo effectum vis normalis cognoscamus. Hoc ergo caſu erit $dy = 0$ et $dx = ds$. Et conſequenter prodit $dv = 0$, et $Pr = 2v$. Vis ergo normalis celeritatem non afficit, ſed tantum motus directionem (548).

Scholion 1.

562. Hinc igitur tam vis normalis, quam vis tangentialis effectus in corpus motum cognoscuntur. Quamobrem cum omnes potentiae, quotquot corpus ſollicitant, modo ſint in eodem plano poſitae cum motus directione, in binas alteram normalem alteram tangentialem poſſint reſolui, etiam quarumcunque potentiarum effectus in corpus motum cognoscitur.

Scholion 2.

563. Hanc ergo priorem partem de motu in eodem plano facto ita ſubdiuidi maxime conuenit, vt primo directiones potentiae ſollicitantis ſint inter ſe parallelae, quemadmodum in noſtris regionibus vis grauitatis directiones ſibi parallelae obſeruantur. Deinde contemplabimur caſus, quibus potentiae directiones omnes in vno puncto conuergunt, quo etiam corpora perpetuo attrahuntur, et qui eſt caſus virium centripetarum, qua de re tam egregiae inuentiones a *Neutono* ſunt factae in *Princ. Phil. Nat. Parte* I. Tertio vero potentias

quas-

quascunque corpus ſollicitantes inducemus et inueſtigabimus, qui motus ſit perpetuo ſecuturus. Ita autem in his ſingulis verſabimur, vt primo quaeſtiones directas proponamus, tum vero etiam quaeſtiones quasque inuerſas, vt hactenus fecimus, ſimus reſoluturi. Perpetuo denique, quantum licet, a caſibus ſimplicioribus ad magis compoſitos et difficiliores progrediemur.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tabula IV. Fig. 13.

564. *Si fuerit potentia conſtans, eiusque directio vbique normalis ad rectam* AB; *atque ex* A *data celeritate ſecundum directionem* AH *proiiciatur corpus: determinari oportet curuam* AMDB, *quam corpus deſcribet, motumque corporis in hac curua.*

Solutio.

Vocetur potentia ſollicitans g, et ſit celeritas, qua corpus in A proiicitur debita altitudini c, atque coſinus anguli HAB $= \lambda$, poſito ſinu toto $= 1$. Iam percurrente corpore elementum $Mm = ds$, ſit celeritas in M debita altitudini v, et AP $= x$, atque PM $= y$, itemque radius oſculi in M $= r$. Propterea erit $Mr = dx$, et $mr = dy$, ex quo apparet hunc caſum referri ad fig. 12, quo corporis motus retardabatur. Habebimus ergo $dv = -gdy$ et $grdx = 2vds$ (557). Ex harum vero aequationum illa oritur $v = C - gy$, in qua conſtans C ex hoc debet determinari, quod poſito $y = 0$, fieri debeat $v = c$. Habetur

betur ergo $v = c - gy$. In altera nunc aequatione loco v ſubſtituatur hic valor inuentus, et prodibit $\frac{grdx}{2ds} = c - gy$. Eſt vero $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$ poſito dx conſtante, quo ſubſtituto erit $\frac{-gds^2}{2ddy} = c - gy$, ſeu $2cddy = 2gyddy - gdx^2 - gdy^2$ poſito $dx^2 + dy^2$ loco ds^2. Huius aequationis integralis reperitur $\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{C}{c-gy}}$. Poſito autem $y = o$, deſignat $\frac{dx}{ds}$ coſinum anguli HAB, qui eſt λ, erit ergo $\lambda^2 = \frac{C}{c}$ et $C = \lambda^2 c$. Habebimus igitur $\frac{dx}{ds} = \lambda \sqrt{\frac{c}{c-gy}}$ et hinc $\frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}} = dx$. Cuius integralis eſt $C - 2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)} = \frac{x}{\sqrt{c}} = 2\lambda\sqrt{c(1-\lambda^2)} - 2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}$, ita determinata conſtante c vt euanescat y poſito $x = o$. Ponatur breuitatis gratia ſinus anguli HAB ſeu $\sqrt{(1-\lambda^2)} = \mu$, erit $gx = 2\lambda\mu c - 2\lambda\sqrt{(\mu^2 c^2 - gcy)}$; atque hinc $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$. Erit ergo etiam $v = c - \frac{\mu g x}{\lambda} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c}$, et $ds^2 = dx^2 (1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{\mu g x}{\lambda^3 c} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^4 c^4}) = \frac{dx^2}{\lambda^2}(1 - \frac{\mu g x}{\lambda c} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c^2})$. Conſequenter erit $\frac{ds^2}{v} = \frac{dx^2}{\lambda^2 c}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{x}{\lambda\sqrt{c}} =$ tempori, quo arcus AM percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

565. Recidet ergo corpus in puncto B in lineam horizontalem AB ſumta $AB = \frac{4\lambda\mu c}{g}$. Tempus vero, quo corpus ſupra AB verſatur et curuam ADB abſoluit, eſt $= \frac{4\mu\sqrt{c}}{g}$.

Corollarium 2.

566. Denotat autem $2\lambda\mu$ ſinum anguli, qui eſt duplus anguli HAB. Quare, ſi huius dupli an-

guli ſinus vocetur $\varkappa$, erit $AB = \frac{2\varkappa c}{g}$. Ex quo apparet diſtantiam AB fore maximam, ſi fuerit $\varkappa = 1$, ideoque angulus HAB ſemirectus, ſi quidem corpus eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur.

Corollarium 3.

567. Intelligitur etiam motum corporis horizontalem eſſe aequabilem. Tempora enim quibus quilibet arcus deſcribitur, ſunt reſpondentibus abſciſſis in recta AB proportionalia.

Corollarium 4.

568. Si corpus perpetuo eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur, ſed ſub diuerſis angulis cum AB, erunt tempora, quibus ſupra AB verſabitur, inter ſe vt ſinus angulorum HAB (565).

Corollarium 5.

569. Maxima altitudo DE ad quam corpus pertinget erit applicata in puncto E, ſumto $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$. Ex quo apparet eſſe AE ſubduplam ipſius AB. Ipſa vero maxima altitudo DE erit $= \frac{\mu^2 c}{g}$, quae proinde quadrato ſinus anguli HAB eſt proportionalis.

Corollarium 6.

570. Ex aequatione $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$ perſpicitur curuam ADB eſſe parabolam, cuius axis ſit recta DE, et parameter $= \frac{AE^2}{DE} = \frac{4\lambda^2 c}{g}$. Parameter ergo proportionalis eſt quadrato coſinus anguli HAB.

Co-

Corollarium 7.

571. Huius ergo parabolae vertex erit punctum D, et diſtantia DF foci F a vertice D eſt $=\frac{\lambda^2 c}{g}$. Quare ſi ducatur recta MF erit haec MF=DQ+DF ex natura parabolae.

Corollarium 8.

572. Porro autem erit MF=DE−MP+DF $=\frac{e}{g}-y=\frac{c-gy}{g}$. Quia vero eſt $v=c-gy$, erit altitudo debita celeritati in M$=g$. MF. Patet ergo etiam fore AF$=\frac{e}{g}$.

Corollarium 9.

573. Perſpicuum igitur eſt corpus hanc parabolam deſcribens in loco quouis *M* tantam habere celeritatem, quantam corpus idem ab eadem potentia vniformi *g* ſollicitatum recta descendens acquirere poteſt ex altitudine, quae aequalis ſit diſtantiae puncti M a foco F parabolae.

Corollarium 10.

574. Coſinus anguli FAE eſt $=\frac{AE}{AF}=2\lambda\mu=\kappa$. Ex quo manifeſtum eſt angulum FAE eſſe complementum dupli anguli HAE ad rectum, ſeu potius exceſſum huius dupli anguli ſuper angulum rectum.

Corollarium 11.

575. Quia angulus AFD eſt deinceps poſitus anguli AFE, hicque complementum anguli FAE, erit angulus AFD duplus anguli HAB.

Scholion 1.

576. Facile ergo ex his deducitur conſtructio parabolae, quam corpus data celeritate et in data directione proiectum deſcribet. Ducti enim AG normali ad AB capiatur angulus GAF = duplo angulo HAE, et in hac directione ſumatur AF aequalis altitudini, ex qua idem corpus recta descendens acquirit celeritatem aequalem ei, qua ex A proiicitur, quo facto erit punctum F focus parabolae quaeſitae (573, 575). Normalis porro DE per E in rectam AB ducta erit axis huius parabolae, atque vertex D reperitur, ſumendo $DF = \frac{AF - FE}{2}$. Cum igitur parameter aequalis ſit 4DF, in promtu erit parabolae deſcriptio.

Scholion 2.

577. Si eſt $g = 1$, habemus caſum grauitatis terreſtris. Quocirca, ſi nullus adeſſet aer, qui ob reſiſtentiam corpora mota impediret, omnia corpora proiecta mouerentur in parabolis. Hanc veritatem primus elicuit *Galilaeus*, et poſt eum omnes ſcriptores mechanici demonſtrauere. Plerique quidem multo breuiore modo et ſine differentio - differentialibus ad eam peruenerunt, ſed nos hic maluimus vti methodo vniuerſali, quae latiſſime pateret, quam nimis particulari, quae ad hunc ſolum caſum eſſet accommodata.

PRO-

PROPOSITIO 73.

Problema.

578. *Si corpus in* A *data celeritate et in data directione proiectum perpetuo attrahatur ad rectam* AB *in ratione quarumcunque functionum diſtantiarum ab hac recta; determinare curuam* ADB, *quam corpus ita ſollicitatum deſcribet et motum totum in hac curua.* Tabula V Fig. 1.

Solutio.

Sit celeritas in A$=\sqrt{c}$ et ſinus anguli HAB$=\mu$, poſito ſinu toto $=1$, et coſinus $=\lambda$. Ponatur celeritas corporis in M debita altitudini v, et elementum M$m=ds$, itemque abſciſſa AP$=x$, applicata PM$=y$ et radius oſculi MR$=r$. Dum autem corpus elementum Mm percurrit, trahitur interea a potentia data, quae ſit $=$P functioni cuidam ipſius y, in directione MP. His poſitis erit $dv=-Pdy$, et $Prdx=2vds$ (557). Sit autem $\int Pdy=Y$, atque Y talis functio ipſius y, quae fiat $=o$ poſito $y=o$. Hanc ob rem erit $v=c-Y$. Deinde ex priore aequatione valor ipſius P i. e. $\frac{-dv}{dy}$ ſubſtituatur in altera $Prdx=2vds$, et habebitur $\frac{-dv}{v}=\frac{2dyds}{rdx}$. Eſt vero poſito ds conſtante $r=\frac{dsdy}{ddx}$, vnde fit $\frac{-dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, et integrando $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Conſtans C determinabitur ex hoc, quod in puncto A, in quo ſit $v=c$, fiat $\frac{dx}{ds}=\lambda$. Quocirca erit $lC=lc+2l\lambda$, porroque ſumendis numeris $\lambda^2cds^2=vdx^2$. Ex hac aequatio-

ne ſtatim habetur elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\lambda\sqrt{c}}$, et hinc tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Pro ipſa autem curua AMDB habebitur aequatio ex duabus aequationibus inuentis $v = c - Y$ et $\lambda^2 c ds^2 = v dx^2$ eliminando v, orietur enim $\lambda^2 c ds^2 = c dx^2 - Y dx^2 = \lambda^2 c dx^2 + \lambda^2 c dy^2$. Sed quia $1 - \lambda^2 = \mu^2$, prodibit $dx = \frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, in qua aequatione, cum ſint indeterminatae x et y a ſe inuicem ſeparatae, conſtrui poterit curua quaeſita ADB. Q. E. I.

Corollarium I.

579. Tempora igitur, quibus arcus quicunque AM deſcribuntur, ſunt, vt abſciſſae reſpondentes AP. Eſt enim tempus per AM $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$.

Scholion I.

580. Motus corporis in curua AM in duos alios cogitatione poteſt reſolui, quorum alter fiat ſecundum parallelas rectae AB, alter ſecundum perpendiculares in hanc AB. Illo motu corpus progreditur ſecundum rectam AB, iſto vero vel aſcendit vel deſcendit reſpectu huius rectae AB. Iam vero perſpicuum eſt a potentia, cuius directio perpetuo eſt in perpendiculis ad AB, motum progreſſiuum horizontalem non immutari, et hanc ob rem hic motus perpetuo eſſe debebit aequabilis, et ea celeritate factus, quae oritur ex ſimili motus reſolutione initialis. Cum vero motus initialis directio ſit recta AH, erit eius celeritas $\sqrt{c}$ ad celeritatem progreſſiuam ſecundum AB vt ſinus totus 1 ad coſinum angu-

guli HAB, qui eſt λ. Celeritas ergo progreſſiua ſecundum AB erit $\lambda\sqrt{c}$, ex qua tempus, quo motus horizontalis perficitur per ſpatium AP$=x$, prouenit $=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$ vt inuenimus.

Corollarium 2.

581. Si corpus celeritate $\sqrt{c}$ ex A perpendiculariter aſcendat in AC, et ſumatur AL$=$PM$=y$, erit celeritas in L aequalis celeritati in M nempe $=\sqrt{v}$. Eſt enim $dv=-Pdy$, atque $v=c-Y$, quemadmodum pro puncto M inuenimus.

Corollarium 3.

582. Si fuerit AC tota altitudo, ad quam corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ ſurſum proiectum pertingere poteſt; erit CL altitudo, ex quo corpus cadendo eandem acquirit celeritatem quam habet in M.

Corollarium 4.

583. Maxima altitudo DE reperitur, faciendo $dy=o$, quo caſu erit $Y=\mu^2 c$, ex qua aequatione valor ipſius y erutus dabit altitudinem DE, et celeritas in P tanta erit, quantam corpus ex altitudine CI delapſum acquirit.

Corollarium 5.

584. Inuenimus autem quoque $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$. Quare cum in puncto D ſit $dx=ds$ erit celeritas in D$=\lambda\sqrt{c}$, quae eſt aequalis ipſi celeritati horizontali, qua corpus ſecundum AB progreditur.

Scho-

Scholion 2.

585. Amplitudo quidem AB ex aequatione quia non poteſt integrari, non apparet. Nihilo tamen minus perſpicuum eſt, partes AE et EB oportere eſſe aequales, et ramum DB ſimilem et aequalem ipſi arcui DA. Namque poſtquam corpus in D peruenit, ſimili modo rurſus accelerabitur, quo ante per AD erat retardatum; quia potentia in iisdem ab AB diſtantiis eſt eadem, hocque modo motus iterum perfecte reſtituitur.

Scholion 3.

586. Facile hinc etiam problema reciprocum, quo ex data curua ADB et celeritate corporis in A, quaeritur potentiarum lex, quae faciat vt corpus in hac curua moueatur, reſolui poterit. Ex aequatione enim $dx = \frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, habetur $Y = \mu^2 c - \frac{\lambda^2 c dy^2}{dx^2}$, atque $dY = Pdy = \frac{-2\lambda^2 c dy ddy}{dx^2}$, poſito dx conſtante. Quia eſt vero $r = \frac{ds^3}{-dx ddy}$ eodem dx poſito conſtante, erit $-ddy = \frac{ds^3}{rdx}$. Hoc ſubſtituto habebitur $P = \frac{2\lambda^2 c ds^3}{rdx^3} =$ potentiae ſollicitanti corpus in M ſecundum directionem MP.

PROPOSITIO 74.

Problema.

587. *Trahatur corpus in* A *proiectum vbique ad virium centrum* C *a vi centripeta quacunque; oporteatque determinari naturam curuae* AM, *in qua corpus mouebitur, et motum corporis in hac curua.*

Tabula V. Fig. 2.

So-

Solutio.

Ponatur vis centripeta corpus in M ad C ſollicitans $=$P et celeritas corporis M debita ſit altitudini v. Vocentur deinde diſtantia CM, y; elementum Mm, ds, et perpendiculum CT in tangentem curuae MT, p, necnon elementum Mr, dx, et radius oſculi MR, r. Erit ergo ob triangula ſimilia Mmr et CMT, $ds\sqrt{(y^2-p^2)}=ydy$, et $dx\sqrt{(y^2-p^2)}=pdy$. Atque radius oſculi r reperitur $=\frac{ydy}{dp}$. His poſitis habebimus $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (557). His aequationibus coniunctis eliminato P erit $rdvdx=-2vdsdy$ ſeu $\frac{dv}{v}=\frac{-2dsdy}{rdx}$. Subſtituantur $\frac{ydy}{dp}$ loco r, et $\frac{y}{p}$ loco $\frac{ds}{dx}$; prodibitque $\frac{dv}{v}=\frac{-2dp}{p}$. Quae integrata dat $v=\frac{C}{p^2}$. Conſtans haec C definietur ex data celeritate initiali in A, quae ſit debita altitudini c, et directione proiectionis, quam ita definiemus vt, poſita diſtantia CA$=a$, perpendiculum CD in tangentem AD ſit $=b$. Propterea erit $C=cb^2$ et $v=\frac{cb^2}{p^2}$. Hinc erit $\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{pds}{b\sqrt{c}}=$ elemento temporis per Mm. Conſequenter ob $pds=2$MCm, erit tempus, quo arcus AM percurritur $=\frac{2.ACM}{b\sqrt{c}}$. Ipſa curua vero determinabitur ſubſtituendo $\frac{cb^2}{p^2}$ loco v in aequatione $Prdx=2vds$, quo facto prodibit $Pp^2rdx=2cb^2ds$. Haec aequatio loco r et $\frac{ds}{dx}$ ſubſtitutis valoribus $\frac{ydy}{dp}$ et $\frac{y}{p}$, transmutabitur in hanc $Pdy=\frac{2cb^2dp}{p^3}$. Quae aequatio, quaecunque P ſit functio ipſius y, ob indeterminatas ſeparatas poterit conſtrui. Q. E. I.

Corollarium 1.

588. Quia tempus, quo arcus AM percurritur, eſt $\frac{2.ACm}{h\sqrt{c}}$, erunt tempora, quibus arcus quicunque deſcribuntur, vt areae comprehenſae arcu deſcripto et rectis ad centrum C ductis.

Corollarium 2.

589. Deinde cum ſit $v = \frac{ch^2}{p^2}$, erit $\sqrt{v} = \frac{h\sqrt{c}}{p}$. Celeritas igitur corporis in quocunque loco curuae percurſae eſt reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem in illo puncto demiſſum.

Scholion 1.

590. Haec arearum aequabilis deſcriptio conſtituit apud *Neutonum* primam propoſitionem, ex qua ſequentia fere omnia deducit. Sunt autem hae duae propritates maxime generales, et id tantum requirunt, vt vis centripetae directio ſit perpetuo verſus centrum. Quacunque enim vis centripeta quantitate ſiue ipſarum CM functione ſiue ſecus exprimatur, aeque tamen vtraque valet. Nam cum in eas incidiſſemus, ex calculo vis centripeta P exterminabatur, eiusque tantum directio in conſideratione relinquebatur.

Corollarium 3.

591. Ad curuam, quam corpus deſcribit, cognoſcendam ipſam vim centripetam dari oportet,

tet, ex hacque data aequatio pro curua habebitur. Eſt enim $Pdy = -\frac{2cb^2dp}{p^3}$, quae exprimit curuae naturam ſi P fuerit quantitas data.

Corollarium 4.

592. Quia eſt $\frac{ydy}{dp} = r$, erit etiam $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$. Atque hoc eſt Theorema Moyvreanum, illud vero $P = -\frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ *Keilius* primus ſe inueniſſe contendit.

Scholion 2.

593. Hae aequationes duplicem habent vtilitatem: Primo enim ex data vi centripeta poterit natura curuae, quam corpus proiectum deſcribit, determinari. Deinde etiam viciſſim ope harum aequationum, ſi fuerit data curua, quam corpus circa virium centrum C deſcribit, definiri poteſt in quouis loco vis centripeta efficiens, vt corpus in hac curua libere moueatur.

Corollarium 5.

594. Quia eſt etiam $dv = -Pdy$, perſpicuum eſt, ſi P fuerit functio ipſius y, celeritatem vbique a diſtantia corporis a centro pendere, et in iisdem diſtantiis corpus eandem habere debere celeritatem.

Corollarium 6.

595. Quoties igitur P eſt functio ipſius y toties etiam curua deſcripta, ita erit comparata vt in aequalibus a centro diſtantiis perpendicula ex centro in tangentes demiſſa ſint inter ſe aequalia, quia celeritates ſunt reciproce vt haec perpendicula (589).

Scholion 3.

596. Atque ſemper ſi P fuerit functio ipſius y, poterit aſſignari recta EC, in qua corpus a vi centripeta ſollicitatum descendens in ſingulis punctis N eandem habebit celeritatem, quam habet in curua AM motum in punctis M aequaliter a centro diſtantibus. Sumto enim CN $=$ CM $= y$, et N$n = mr = dy$. Si fuerit celeritas in N aequalis celeritati in M ſcilicet debita altitudini v, erit etiam dum corpus per elementum Nn moueatur $dv = -Pdy$. Ex quo intelligitur celeritatem in n aequalem fore celeritati in m. Atque ita in ſingulis punctis rectae EC corpus tantam habebit celeritatem, quantam habet in curua AM in iisdem a centro C diſtantiis. Si ergo fuerit E motus initium in quo celeritas eſt $= o$, ex data linea EC corporis in curua AM moti in ſingulis punctis innotescet celeritas. Hac igitur recta EC in poſterum vtemur ad celeritates corporis in curua moti definiendas, eamque vocabimus diſtantiam celeritates determinantem.

Corollarium 7.

597. Cum igitur data ſit celeritas in A nempe debita altitudini c, ex hoc tota diſtantia EC reperietur. Tantum enim punctum E diſtans a C accipi debet, vt corpus ex E hac vi centripeta ſollicitatum descendens in A aequirat celeritatem $= \sqrt{c}$.

Co-

Corollarium 8.

598. Si vocetur angulus $MCm = dw$, erit $dw = \frac{dx}{y} = \frac{pdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Vnde prodit $p = \frac{y^2dw}{\sqrt{(y^2dw^2+dy^2)}}$. Tempusculum vero, quo angulus MCm abſoluitur eſt $= \frac{pds}{h\sqrt{c}} = \frac{pydy}{h\sqrt{c}(y^2-p^2)}$. Hoc igitur tempusculum erit $= \frac{y^2dw}{h\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

599. Si celeritatem angularem ſeu eam qua angulus MCm percurritur metiri velimus ipſo hoc angulo per tempus diuiſo prodibit celeritas angularis in $M = \frac{h\sqrt{c}}{y^2}$. Celeritas igitur angularis eſt reciproce vt quadratum diſtantiae corporis a centro C.

Scholion 4.

600. Quia autem curua, quam corpus a data vi centripeta ſollicitatum deſcribit, aliter non cognoscitur, niſi per aequationem inter corporis diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem ex centro demiſſum; difficile plerumque eſt iudicare qualis ſit curua inuenta, cum curuarum naturas conſueuerimus aequationibus inter coordinatas orthogonales exponere. Interim tamen huiusmodi aequationes inter diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem, ſi modo ſint vel algebraicae vel differentiales in quibus indeterminatae ſint a ſe inuicem ſeparatae, ſufficiunt ad curuas quaeſitas conſtruendas. Sed quo natura et ordo curuarum harum penitus poſſit inueſtigari, dabimus

hic methodum aequationes inter diſtantiam et perpendiculum ad conſuetas aequationes inter coordinatas reducendi.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tabula V. Fig. 3. 601. *Naturam curuae* AM, *quam corpus a quacunque vi centripeta ſollicitatum deſcribit, definire aequatione inter coordinatas orthogonales* CP *et* PM *ad axem fixum* AC *relatas.*

Solutio.

Poſitis vt ante celeritate initiali in $A = \sqrt{c}$, $AC = a$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demiſſo $= b$. Atque praeterea $CM = y$, $CT = p$, et vi centripeta in $M = P$, quae ſit functio quaedam ipſius y. Vocetur deinde $CP = x$, et $PM = z$, erit $CM = \sqrt{(x^2 + z^2)} = y$, ſeu $z = \sqrt{(y^2 - x^2)}$, retinebimus enim loco z in calculo y, quia hoc modo calculus fit facilior et breuior, atque poſt peractam totam operationem in promtu eſt z loco y introducere. His poſitis erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}{\sqrt{(y^2 - x^2)}}$ et $Mr = \frac{-ydx + xdy}{\sqrt{(y^2 - x^2)}}$. Fiet igitur $\frac{Mr}{Mm} = \frac{p}{y} = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$, et conſequenter $p = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$. Sed pro curua AM hanc ante elicuimus aequationem $Pdy = \frac{2cb^2 lp}{p^3}$. Ponamus autem Y integrale ipſius Pdy ita aſſumtum vt euaneſcat poſito $y = a$. Quo facto erit $Y = C - \frac{cb^2}{p^2}$, vbi conſtans C ob $p = b$, ſi eſt $y = a$, debet eſſe $= c$. Erit er-

ergo $Y = \frac{cp^2 - ch^2}{p^2}$, ex qua prodit $p = \frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$. Quae quantitas cum ſit Y functio ipſius y, eſt quoque functio quaedam ipſius y. Hanc ob rem habebimus hanc aequationem $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$. Ponamus $x = uy$ et $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = Q$ breuitatis gratia, erit $Q = \frac{-y^2du}{\sqrt{(dy^2 - u^2dy^2 + y^2du^2)}}$, ex qua oritur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(y^2 - Q^2)}} = \frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ reſtituto $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$ loco Q. Quae igitur aequatio, cum in ea indeterminatae u et y ſint ſeparatae, ſemper poterit conſtrui. Q. E. I.

Corollarium 1.

602. Quia eſt $u = \frac{x}{y}$, exprimet u coſinum anguli MCA. Et hanc ob rem vltima aequatio ſeparata erit inter diſtantiam corporis a centro et anguli ACM coſinum. Ex hac vero aequatione ſponte oritur aequatio inter x et z.

Corollarium 2.

603. Aequatio vero nunquam eſſe poterit algebraica, niſi denotet $\int \frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ arcum circuli commenſurabilem cum arcu $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$.

Corollarium 3.

604. Quoties ergo $\frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ reduci poterit ad formam huiusmodi $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}}$ et λ ſit numerus rationalis, aequatio algebraica pro curua quaeſita poterit exhiberi.

Scho-

Scholion 1.

605. Si autem $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ aequabitur huiusmodi quantitati $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$, habebitur integratione per logarithmos imaginarios peracta haec aequatio $\frac{\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1}} = \left(\frac{\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}}\right)^\lambda$ $\left(\frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1}}\right)^\lambda$. Eſt vero hic C conſtans quantitas ex eo determinanda, quod, ſi fit $CM(y) = CA(a)$, ſimul quoque fieri debeat $x=a$, ſeu $u=1$. Ex illa autem aequatione conficitur iſta

$$u = \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$
$$\frac{-(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

Quae quoties λ eſt numerus rationalis, ab imaginariis $\sqrt{-1}$ affectis libera redditur, et in algebraicam certi ordinis transmutatur.

Corollarium 4.

606. Quia eſt $x=uy$, habebitur iſta aequatio $x=$

$$\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda y-(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda y}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

quae, cum ſit Z functio ipſius y, et $y=\sqrt{(x^2+z^2)}$ facile in aequationm inter x et z mutatur.

Scholion 2.

607. Superior aequatio etiam in hanc poteſt transmutari $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}$

($\sqrt{}$

$(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}))$, quae commodior eſt, ſi $\frac{1}{\lambda}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

Scholion 3.

608. At ſi fuerit λ numerus negatiuus $=-\mu$, habebitur $\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}}$

$$-\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}}=u.$$

Ex quo apparet ſi λ fuerit negatiuum, ipſius u valorem tantum fieri negatiuum, id quod quidem ex aequatione differentiali intelligitur. Simili vero modo erit etiam $Z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}))$.

Corollarium 5.

609. Si fuerit $\lambda=1$, erit $u=\frac{Z\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$ et $x=\frac{Zy\sqrt{(A^2-C^2)}-Cy\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$. Si fuerit $\lambda=-1$, etiam u vel x ſumi debet negatiuum.

Corollarium 6.

610. Si fuerit $\lambda=2$, erit $u=\frac{2Z(A^2-2C^2)\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^4}-\frac{2C(A^2-2Z^2)\sqrt{(A^2-C^2)}}{A^4}$. At ſi fuerit $\lambda=\frac{1}{2}$ erit $Z=C-2Cu^2+2u\sqrt{(1-u^2)(A^2-C^2)}$.

PROPOSITIO 26.
Theorema.

Tabula V. Fig. 4.

611. *Si fuerit vis centripeta vt functio quaecunque diſtantiarum a centro* C, *et corpus in* A *proiiciatur ſecundum directionem normalem in* AC *celeritate, cuius altitudo debita ſe habeat ad dimidiam* AC, *vt vis centripeta in* A *ad vim grauitatis* 1: *hoc corpus in peripheria circuli* AMBA *cuius centrum eſt* C *mouebitur aequabiliter.*

Demonſtratio.

Moueatur enim corpus in hoc circulo; quia eius diſtantia a centro non variatur, perpetuo ab eadem vi centripeta verſus C ſollicitabitur, cuicunque functioni diſtantiarum etiam ſit proportionalis vis centripeta. Atque quia ad centrum C ſollicitatur, erit directio potentiae ſollicitantis normalis ſemper in curuae portiunculam, in qua corpus mouetur. Quocirca corpus ſollicitabitur perpetuo a vi normali nunquam a tangentiali, et hanc ob rem eius celeritas ſemper manebit eadem (591), ac ideo corpus motu aequabili peripheriam deſcribet. Deinde quia vis centripeta ſeu normalis vbique eſt eadem, ponatur ea $=g$, et celeritas itidem conſtans debita altitudini c, atque radius AC$=a$, quae quantitas a vbique exhibet curuae radium osculi. His igitur poſitis erit $ag=2c$ (561). Ex quo haec oritur analogia: Vt altitudo celeritati corporis, qua initio in A proiicitur debita c ad dimidiam diſtantiam

am AC, $\frac{1}{2}a$ ita vis centripeta g ad vim grauitatis 1. Q. E. D.

Corollarium 1.

612. Quando ergo corpus ſemel arcum circuli deſcribit, cuius centrum eſt in ipſo centro virium C; tum perpetuo in ea circuli peripheria reuoluetur. Si quidem vis centripeta a ſolis diſtantiis a centro pendeat, ita vt in aequalibus diſtantiis vis centripeta ſit aequalis.

Corollarium 2.

612. Poſita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit peripheria circuli, in quo corpus mouetur $=2\pi a$. Quia deinde celeritas, qua corpus mouetur, eſt $=\sqrt{c}=\sqrt{\frac{ag}{2}}$; erit tempus vnius periodi per totam peripheriam $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

614. Si ergo plura corpora in diuerſis circulis moueantur, erunt tempora reuolutionum in ſubduplicata ratione compoſita ex directa radiorum circulorum et inuerſa virium centripetarum.

Corollarium 4.

615. Si corpus ex A perpendiculariter ad AC proiiciatur, ſed celeritate vel maiore vel minore quam $\sqrt{\frac{ag}{2}}$. Corpus arculum circuli deſcribet, cuius radius erit vel maior vel minor quam AC.

Corollarium 5.

615. Hoc ergo caſu, quo corpus incipit in arcu circulari moueri, cuius centrum non eſt in C ſtatim ad centrum vel magis accedet vel magis ab eo recedet. Et hanc ob rem ſtatim ab alia ſollicitabitur vi centripeta, niſi forte vis centripeta vbique eſt eadem.

Scholion.

Tabula V. Fig. 5. 617. Quacunque autem corpus in A celeritate proiiciatur, modo ſit eius directio in rectam AC per centrum virium C tranſeuntem perpendicularis, curua BMAND hanc habebit proprietatem, vt eius portiones AMB, AND cis et vltra rectam AC poſitae ſint inter ſe ſimiles et aequales, atque AC axis et diameter huius curuae. Nam, quia, vt iam innuimus, vis centripeta functioni cuidam diſtantiarum a centro eſt proportionalis, corpus ſiue ſupra ſiue infra AC in aequalibus a C diſtantiis aequaliter ſollicitatur, et hanc ob rem eodem modo per DNA ad A accedere debet, quo ab A per AMB recedit, atque in punctis homologis M et N eandem quoque habebit celeritatem.

Corollarium 6.

618. Omnis igitur recta ex centro C ducta, quae in curuam eſt normalis, erit ſimul curuae diameter; ita vt curuae partes cis et vltra hanc rectam poſitae ſint inter ſe ſimiles et aequales.

PRO-

PROPOSITIO 77.
Theorema.

619. *Si plura corpora circa centrum virium* C *moueantur, atque deſcribant curuas* AM, am *circa* C *ſimiles: erunt celeritates in punctis ſimilibus* M *et* m, *in ſubduplicata ratione compoſita ex rationibus laterum homologorum et virium centripetarum in locis homologis* M *et* m. Tabula V. Fig. 6.

Demonſtratio.

Quia eſt $AC:aC = MC:mC$, erit etiam radius osculi in *M* ad radium osculi in *m* in eadem ratione, nec non etiam perpendiculum CT ad C*t*. Ex propoſitione 74 vero apparet eſſe $Prdx = 2vds$ ſeu loco $\frac{ds}{dx}$ poſito $\frac{y}{p}$, $Ppr = 2vy$. Hinc ergo erit celeritas $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Ppr}{2y}}$. Ex quo prodit haec analogia; celeritas in M eſt ad celeritatem in *m* in ratione ſubduplicata compoſita ex directis virium centripetarum in M et *m*, radiorum osculi in M et *m*, atque perpendiculorum CT ad *c*T; atque ratione inuerſa diſtantiarum MC ad *m*C. Quia vero eſt CT ad *c*T vt MC ad *m*C, et radius osculi in M ad radium osculi in *m* vt MC ad *m*C, erit celeritas in M ad celeritatem in *m* in ratione ſubduplicata compoſita ex rationibus virium centripetarum in M et *m*, et laterum homologorum MC ad *m*C. Q. E. D.

Corollarium I.

620. Si ergo dicatur $AC = A$; $aC = a$. $CD = H$ et $Cd = h$, itemque celeritas in $A = \sqrt{C}$, et in $a = \sqrt{c}$; erit celeri-

ritas angularis in $M = \frac{H\sqrt{C}}{MC^2}$ et celeritas angularis in $m = \frac{b\sqrt{c}}{mC^2}$ (599). Quia autem eſt $H : b = MC : mC = A : a$; erunt celeritates angulares in M et m vt $\frac{\sqrt{C}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{c}}{a}$, i. e. in ratione conſtante.

Corollarium 2.

621. Tempora igitur, quibus aequales anguli ACM, $aC\bar{m}$, ſeu ſpatia homologa AM et *am* abſoluuntur ſunt reciproce vt celeritates angulares in M et m, i. e. directe vt latera homologa et reciproce vt celeritates in punctis homologis.

Scholion 1.

622. Quin etiam celeritates in punctis homologis vbique eandem tenent rationem. Eſt enim celeritas in $M = \frac{H\sqrt{C}}{CT}$ et celeritas in $m = \frac{b\sqrt{c}}{Ct}$ (589). Quamobrem cum ſit $H : b = CT : Ct$, erit celeritas in M ad celeritatem in m vt $\sqrt{C}$ ad $\sqrt{c}$ i. e. vt celeritas in A ad celeritatem in a.

Corollarium 3.

623. Ex ipſa autem propoſitione perſpicitur eſſe celeritatem in A, $\sqrt{C}$ ad celeritatem in a, $\sqrt{c}$ in ratione ſubduplicata compoſita ex rationibus virium centripetarum in A et a, et laterum homologorum A ad a. Quare ſi dicatur vis centripeta in $A = G$ et vis centripeta in $a = g$; erit $\sqrt{C} : \sqrt{c} = \sqrt{AG} : \sqrt{ag}$.

Co-

Corollarium 4.

624. Conſequenter tempus per AM erit ad tempus per *am*, vt $V\frac{A}{G}$ ad $V\frac{a}{g}$ i. e. in ratione ſubduplicata compoſita ex directa laterum homologorum et inverſa virium centripetarum in punctis A et *a*. Quae ergo ratio eſt conſtans, eandemque tenere debent inter ſe integra reuolutionum tempora.

Scholion 2.

625. Hoc etiam caſu, quo plures figurae ſimiles circa centrum C deſcribuntur, vires centripetae in punctis homologis eandem vbique tenere debent rationem. Quia enim eſt $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592) erit vis centripeta in M ad vim centripetam in *m* directe vt quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in *a* et reciproce vt AC ad *a*C quae eſt ratio conſtans. Quamobrem quo poſſint plures figurae ſimiles circa centrum C deſcribi, oportet vt vis centripeta huiusmodi diſtantiarum functione exprimatur, quae in locis homologis vires centripetas eandem rationem tenentes praebeat. Scilicet poſita P vi centripeta in diſtantia *y* et Q in diſtantia *my*, debebit P ad Q habere rationem conſtantem, in qua non inſit *y*. Hoc enim niſi fuerit, fieri non poteſt, vt circa centrum C plures figurae ſimiles deſcribantur.

Corollarium 5.

626. Hoc autem obtineri non poteſt, niſi ſit P poteſtas quaedam ipſius *y*, vt $\frac{y^n}{f^n}$. Hoc enim ca-

caſu fit $Q = \frac{m^n y^n}{f^n}$ et ratio P:Q erit 1 : m^n, quae eſt conſtans.

Corollarium 6.

627. Niſi ergo vis centripeta cuidam dignitati diſtantiarum a centro C ſit proportionalis, ne fieri quidem poteſt, vt plures figurae ſimiles circa centrum C deſcribantur. Atque in his ſolis caſibus locum habebunt proprietates, quas ex hac propoſitione eruimus.

Corollarium 7.

628. Si autem fuerit $P = \frac{y^n}{f^n}$, erit $G = \frac{A^n}{f^n}$ et $g = \frac{a^n}{f^n}$. Celeritates ergo in locis homologis tenebunt rationem $A^{\frac{n+1}{2}}$ ad $a^{\frac{n+1}{2}}$.

Corollarium 8.

629. Atque tempora quibus arcus ſimiles AM et *am* abſoluuntur erunt in ratione $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$ ſeu in ratione multiplicata laterum homologorum cuius exponens eſt $\frac{1-n}{2}$.

Scholion 3.

630. In praecedente et hac propoſitione continentur omnia Theoremata, quae *Hugenius* de viribus centrifugis in tractatu ſuo de Horologio oscil-

cillatorio annexit. Eaque partim re ipſa hic appoſui, partim euidentiſſime ex ipſis propoſitionibus deduci poſſunt.

PROPOSITIO 78.

Problema.

631. *Si centrum* C *attrahat in ratione diſtantiarum directa, et corpus ex* A *ſecundum directionem ad radium* AC *normalem data cum celeritate proiiciatur: determinare curuam* AMDBH, *quam corpus deſcribet, corporisque celeritatem in ſingulis locis.* Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Ponatur diſtantia $CA = a$, erit perpendiculum, quod ex centro C in motus directionem demittitur $= a$. Celeritas vero in A debita ſit altitudini c. Peruenerit corpus in M, ſitque $CM = y$, et perpendiculum ex C in tangentem in M demiſſum CT ponatur $= p$, atque celeritas in M debita ſit altitudini v. Sit porro diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati, f; erit vis centripeta in $M = \frac{y}{f}$ poſita vi grauitatis $= 1$. His cum prop. 75 (601) comparatis, erit $P = \frac{y}{f}$ et $Y = \frac{y^2 - a^2}{2f}$. Quamobrem habebitur $p = \frac{a\sqrt{2cf}}{\sqrt{(a^2 + 2cf - y^2)}}$. Eſt vero $v = \frac{a^2 c}{p^2}$ (587), ex quo erit $v = \frac{a^2 + 2cf - y^2}{2f}$. Ob elementum curuae autem $= \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$, erit elementum temporis $\frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2y^2 + 2cfy^2 - y^4 - 2a^2cf)}}$. Demiſſo ex M in CA perpendiculo MP, vocetur $CP = x$, pona-

naturque $x = uy$. His poſitis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{2cf}}{y\sqrt{(2cfy^2 - 2a^2cf - y^4 + a^2y^2)}}$ (601). Fiat $y = \frac{1}{\sqrt{(q + \frac{2cf+a^2}{4a^2cf})}}$ et prodibit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-\frac{1}{2}dq}{\sqrt{((\frac{a^2-2cf}{4a^2cf})^2 - q^2)}}$. Quo collato cum formula $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda = \frac{1}{2}$, $Z = -q$ et $A = \frac{a^2-2cf}{4a^2cf}$. Ex his autem inuenitur $Z = -q = C - 2Cu^2 + 2u\sqrt{(A^2-C^2)(1-u^2)} = \frac{a^2+2cf}{4a^2cf} - \frac{1}{y^2}$. Conſtans quantitas C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$. Hinc ergo erit $C = \frac{2cf-a^2}{4a^2cf}$ vnde fit $\sqrt{(A^2-C^2)} = 0$. His ſubſtitutis habebitur $\frac{1}{2cf} - \frac{1}{y^2} = \frac{(a^2-2cf)u^2}{2a^2cf} = \frac{(a^2-2cf)x^2}{2a^2cfy^2}$ ob $u = \frac{x}{y}$. Aequatio igitur reſultabit iſta $a^2y^2 - 2a^2cf = (a^2-2cf)x^2$. Ponatur applicata $MP = z$, erit $y^2 = x^2 + z^2$. Hinc ſequens prodibit pro curua quaeſita aequatio inter coordinatas orthogonales, $a^2z^2 + 2cfx^2 = 2a^2cf$. Haec aequatio eſt ad ellipſin, cuius centrum in C eſt ſitum, et $AB = 2a$ eſt alter eius axis; alter vero $DH = 2\sqrt{2cf}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

632. Altitudo celeritati in M debita v eſt $= \frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Quia autem eſt $a^2 + 2cf = AC^2 + CD^2 = AD^2$, erit $v = \frac{AD^2 - CM^2}{2f}$.

Corollarium 2.

633. Simili modo perpendiculum CT in tangentem MT demiſſum erit $p = \frac{AC.CD}{\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$ et ipſa tangens

gens $MT = \frac{\sqrt{(AD^2.CM^2 - CM^4 - AC^2.CD^2)}}{\sqrt{(AD^2 - CM^2)}} = \frac{(AC^2 - CD^2)\,CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$. Si quidem eſt $AC > CD$.

Corollarium 3.

634. Hoc autem caſu quo $AC > CD$, erit AB ellipſis axis transuerſus, in eoque foci F et G ſiti. Erit autem $CF = CG = \sqrt{(AC^2 - CD^2)}$. Adeoque $MT = \frac{CF^2.CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$.

Corollarium 4.

635. Anguli ergo TMC, quem corporis in M directio cum radio MC conſtituit, ſinus eſt $= \frac{AC.CD}{CM.\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$, et coſinus $= \frac{CF^2.CP.PM.}{CM.AC.CD.\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$.

Scholion 1.

636. Diſtantia celeritates determinans CE (596, 597) aequalis eſt ſemper ſubtenſae AD. Nam poſita $CE = k$, deſcendat corpus ex E verſus C a vi centripeta tractum; habere debebit corpus cum in A peruenerit celeritatem altitudini c debitam. Quamobrem erit $k = \sqrt{(a^2 + 2cf)}$, (275). Quia autem eſt $AC = a$, et $CD = \sqrt{2cf}$, erit $CE = \sqrt{(AC^2 + CD^2)} = AD$.

Corollarium 5.

637. Altitudo debita celeritati, quam corpus in recta EC motum acquiret, cum in C peruenerit, erit $\frac{k^2}{2f} = \frac{a^2 + 2cf}{2f} = \frac{AD^2}{2f}$.

Corollarium 6.

638. Tempus quo arcus AM abſoluitur $= \frac{2.ACM}{a\sqrt{c}}$ (588) ob $b = a$ hoc caſu. Quamobrem

 tem-

tempus totius reuolutionis per ellipſis perimetrum ADBHA erit $=\frac{2.\,Areae\ Ellipticae}{a\sqrt{c}}$. Eſt vero poſita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, ſpatium ellipticum $=\pi a\sqrt{2cf}$. Conſequenter tempus vnius reuolutionis erit $2\pi\sqrt{2f}$.

Corollarium 7.

639. Si ergo plura corpora circa idem centrum virium attrahens in ratione diſtantiarum reuoluantur in ellipſibus, erunt ſingulorum tempora integrarum reuolutionum inter ſe aequalia.

Scholion 2.

640. Quando corporis directio initialis in puncto A non ponitur normalis ad radium AC, calculus non praebet ellipſin pro curua a corpore deſcripta; ſed aliam curuam ordinis quarti, quae tamen nullo modo ſatisfacere poteſt. Cauſa huius diſcrepantiae calculi a veritate in hoc conſiſtit, quod expreſſio ſinus anguli, quem curua cum radio conſtituit, in y et u ſumta ſemper euadat $=1$, poſito $y=a$ et $u=1$, etiamſi ſecundum hypotheſin alia prodire debeat quantitas. Sinus enim anguli, quem curua cum radio comprehendit eſt $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ quae expreſſio facto $u=1$ euidenter abit in vnitatem, cum tamen prodire debeat $\frac{b}{a}$. Quamobrem perſpicuum eſt, niſi ponatur $b=a$, calculum hoc modo inſtitutum nunquam cum veritate conſpirare poſſe, ſi quidem aequatio inter u et y quaeri debeat. Haec ergo regula perpetuo eſt tenenda, quoties

ties curua deſcripta ſecundum praecepta propoſ. 75 (601) inueſtigabitur. Methodus autem hac propoſitione tradita ad curuas algebraicas tantum inueniendas eſt accommodata; alia enim methodo, ſi curuae ſint transcendentes, vti oportet. At omnes curuae algebraicae hac gaudent proprietate, vt in eas ex puncto quocunque duci poſſit perpendicularis. Quocirca, quoties corpus in curua algebraica circa centrum virium reuoluitur, ſemper in ea vel vnum vel plura poterunt aſſignari puncta, in quibus radius ad curuam ſit perpendicularis. In huiusmodi igitur punctis corpus motum inchoare ponendum eſt, atque calculus ſemper veritati erit conſentaneus. Ex tali autem ſolutione facile inuenietur corporis in quouis alio loco celeritas, atque hinc methodo inuerſa data corporis celeritate in loco, in quo radius non eſt ad curuam normalis, reperietur celeritas in loco, vbi radius in curuae normalem incidit. Quomodo autem hoc effici debeat ex propoſitione ſequente perſpicietur. Supra memorata curuarum algebraicarum proprietas vero, qua ex quocunque puncto dato in eas perpendicularis poteſt demitti, non in omnes curuas transcendentes competit. In ſpirali enim logarithmica nullum radium ex centro ad curuam ductum eſſe normalem, ſed perpetuo cum ea conſtantem conſtituere angulum, cuique eſt notum. Quo tandem ratio intelligatur, quare $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ ſemper facto $u=1$ mutetur in vnitatem, cum tamen quiuis alius quo-

que angulus praeter rectum ex ea produci deberet; animaduertendum eſt abeunte u in 1, elementum du euaneſcere prae dy, niſi ſit tangens in A ad radium AC normalis. Hancque ob cauſam poſito $u=1$, elementum $dy^2(1-u^2)$ non eſt negligendum ratione y^2du^2, cum vtrumque euaneſcat, vt et numerator ydu. Quo fit, vt cuiusuis arbitrarii anguli ſinus illa formula facto $u=1$ poſſit exprimi. Sed quoniam haec cautela in calculo non poteſt obſeruari, praeter caſus $h=a$ calculus nunquam veram curuam exhibet.

PROPOSITIO 79.

Problema.

641. *Attrahente centro virium in ratione diſtantiarum, et proiiciatur corpus in M celeritate quacunque, et ſecundum quamcunque directionem MT: determinari oportet ellipſin in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Solutionem huius problematis eſſe poſſibilem ex hoc intelligi poteſt, quod numerus datorum non ſit nimis magnus ad ellipſin determinandam, provt apparebit. Ponantur radius $CM=y$, ſinus anguli $CMT=s$, poſito ſinu toto $=1$, et altitudo celeritati in M debita $=v$, diſtantia praeterea a centro C, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis maneat $=f$. Hae igitur quantitates tanquam datae et cognitae erunt conſiderandae; incognitae vero et inueniendae ſunt ellipſis axes, eorumque poſitio: ho-

horum ponatur $AC = a$ et $CD = b$, eritque $b = \sqrt{2cf}$ (631). His poſitis habebitur ſtatim $2fv = a^2 + b^2 - y^2$ (632), vnde fit $a^2 + b^2 = AD^2 = 2fv + y^2$, cognoſcitur ergo iam ſubtenſa AD, huicque aequalis diſtantia CE celeritates determinans. Deinde quoque habetur $s = \frac{ab}{y\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}} = \frac{ab}{y\sqrt{2fv}}$, ex quo oritur $ab = sy\sqrt{2fv}$. His coniunctis oritur $(a^2-b^2)^2 = 4f^2v^2 + 4fvy^2 + y^4 - 8fs^2vy^2 = 4f^2v^2 + y^4 + 4fvy^2(1-2s^2)$. Eſt vero $1-2s^2$ coſinus dupli anguli CMT, quem vocemus i. Erit ergo $a^2-b^2 = \sqrt{(4f^2v^2 + y^4 + 4fivy^2)}$. Ex his aequationibus prouenit $a^2 = fv + \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{(f^2v^2 + \frac{1}{4}y^4 + fivy^2)}$ et $b^2 = fv + \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{(f^2v^2 + \frac{1}{4}y^4 + fivy^2)}$. Inuentis vero axibus poſitio eorum facile habebitur. Eſt enim coſinus anguli $ACM = \frac{x}{y} = \frac{1}{y}\sqrt{(\frac{a^2y^2-a^2b^2}{a^2-b^2})} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{fiv+\frac{1}{2}y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}})}$ ſeu coſinus dupli anguli $ACM = \frac{2fiv+y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$, atque ſinus huius anguli $2ACM = \frac{2fv\sqrt{(1-i^2)}}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

642. Vbicunque igitur corpus proiiciatur, et quacunque celeritate, atque ſecundum quamvis directionem, corpus circa centrum virium in perimetro ellipſis mouebitur, cuius centrum eſt in ipſo centro virium.

Scholion.

643. Hactenus vis centralis diſtantiis proportionalis attrahens eſt poſita; ſimili autem modo reperientur curuae deſcriptae, ſi vis corpora a centro

tro in eadem ratione repellat. Praecedentia enim omnia ad hunc caſum accommodantur, ſi modo $-f$ loco f ſcribatur. Hoc vero facto, curua, quae ante erat ellipſis transmutatur in hyperbolam, axe minore imaginario facto, centrumque virium manet in centro hyperbolae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tabula VI. Fig. 2. 644. *Si vis centripeta fuerit quadratis diſtantiarum reciproce proportionalis, corpusque in* A *data celeritate proiiciatur in directione ad radium* AC *normali: oportet determinare curuam* AMDBHA, *quam corpus deſcribet, et motum ipſum per illam.*

Solutio.

Poſitis vt ante AC$=a$, et celeritate in A debita altitudini c, ſit f diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati. Ponatur tum CM$=y$, perpendiculum, quod in tangentem demittitur, CT$=p$, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His cum prop. 75 (601) comparatis erit $h=a$, $P=\frac{f^2}{y^2}$, et $Y=\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum MP, et vocetur CP$=x$, ponaturque $x=uy$. Quo facto erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{ady\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-a^2c-\frac{f^2y^2}{a}+f^2y)}}$. Ponatur $y=\frac{1}{\frac{f^2}{2a^2c}-q}$, eritque $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{dq}{\sqrt{((\frac{2ac-f^2}{2a^2c})^2-q^2)}}$. Conferatur haec formula cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), eritque $\lambda=1$, $A=\frac{2ac-f^2}{2a^2c}$ et $Z=q$. Quamobrem habe-

bebitur ſequens aequatio $u=\frac{q\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-q^2)}}{A^2}$ (609). Eſt vero $q=\frac{f^2}{2a^2c}-\frac{1}{y}$, et conſtans quantitas C ex eo debet definiri, quod facto $u=1$ fiat $y=a$. Aequatio vero illa parum mutata in hanc tranſit $C+u\sqrt{(A^2-q^2)}=q\sqrt{(1-u^2)}$. In qua facto $u=1$ et $q=\frac{f^2-2ac}{2a^2c}$, prodit $C=o$. Conſequenter habebitur $(\frac{f^2-2ac}{2a^2c})^2u^2=q^2$, ſeu $(f^2-2ac)u=2a^2cq=f^2-\frac{2a^2c}{y}$. Quia vero eſt $u=\frac{x}{y}$, erit $(f^2-2ac)x=f^2y-2a^2c$, atque $f^4y^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)+(f^2-2ac)^2x^2$. Vocetur applicata $PM=z$, erit $f^4z^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)-4acf^2x^2+4a^2c^2x^2$. Ponatur $x=t+\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quo facto habebitur $f^4z^2=\frac{a^3cf^4}{f^2-ac}-4act^2(f^2-ac)$. Quae eſt aequatio ad ellipſin abſciſsis in axe transuerſo a centro G ſumtis, cuius axis transuerſus eſt $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ et coniugatus $=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Centrique virium C a centro ellipſis G diſtantia $CG=\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quae aequalis eſt ſemidiſtantiae focorum. Hanc ob rem centrum virium C in alterutro foco ellipſis eſt poſitum. Apparet igitur corpus in A celeritate $\sqrt{c}$ proiectum circa centrum C deſcripturum eſſe ellipſin AMDBHA, cuius focus alter in C eſt ſitus. Eritque $AC=a$, $AG=\frac{af^2}{2f^2-2ac}$, $AB=\frac{af^2}{f^2-ac}$, $BC=\frac{a^2c}{f^2-ac}$, axisque coniugatus $DH=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Latus vero rectum ellipſis eſt $=\frac{4a^2c}{f^2}$. Ad celeritatem in M determinandam vſu erit aequatio $v=\frac{a^2c}{p^2}$. Eſt autem $p=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}=\frac{a\sqrt{acy}}{\sqrt{(acy+(a-y)f^2)}}$, ergo $v=\frac{acy+(a-y)f^2}{ay}$. Q. E. I.

Corollarium I.

645. Diſtantia celeritates determinans CE inuenitur $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ (274). Ex quo apparet diſtantiam hanc CE aequalem eſſe axi transuerſo ellipſis AB.

Corollarium 2.

646. Toties autem curua a corpore deſcripta eſt re vera ellipſis, quoties eſt $f^2 > ac$ ſeu $c < \frac{f^2}{a}$. At ſi eſt $c > \frac{f^2}{a}$, tum axis transuerſus fit negatiuus, et coniugatus imaginarius, id quod indicio eſt curuam his caſibus abire in hyperbolam.

Corollarium 3.

647. Quando vero eſt $c = \frac{f^2}{a}$, curua medium tenebit inter hyperbolam et ellipſin axemque transuerſum habebit infinitum. Erit itaque tum curua a corpore deſcripta parabola.

Corollarium 4.

648. Si $c = \frac{f^2}{2a}$, ellipſis abit in circulum, aequales enim euadunt axes, transuerſus et coniugatus. Centrum vero virium in ipſum centrum circuli incidet.

Corollarium 5.

649. Ducatur in ellipſi ex altero foco F recta FM ad M, erit $FM = AB - y = \frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$. Ex quo cognoſcitur fore $v = \frac{(f^2-ac).FM}{a.CM}$. Eſt ergo celeritas in puncto quouis M vt $\sqrt{\frac{FM}{CM}}$.

Co-

Corollarium 6.

650. Sinus anguli, quem radius CM cum tangente MT conſtituit eſt $= \frac{p}{y} = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(acy^2 + (a-y)f^2y)}}$ poſito ſinu toto $= 1$. Sed quia eſt $FM = \frac{f^2(a-y) + acy}{f^2 - ac}$, erit ſinus anguli $CMT = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}\,FM.CM}$.

Corollarium 7.

651. Quia eſt $GC = \frac{2a^2c - af^2}{2f^2 - 2ac}$, centrum virium erit in remotiore foco a vertice A, quoties eſt $c > \frac{f^2}{2a}$. In propiorem vero incidet ſi $c < \frac{f^2}{2a}$.

Corollarium 8.

652. Poſito axe maiore $AB = E$, parametro $= L$, erit $E = \frac{af^2}{f^2 - ac}$, et $L = \frac{4a^2c}{f^2}$. Hinc reperitur $a = \frac{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}{2}$ atque $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{L}}{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}$.

Corollarium 9.

653. Tempus, quo corpus integram ellipſis circumferentiam percurrit, eſt $= \frac{2.\,Areae\ Ellipt.}{a\sqrt{c}} = \frac{4.\,Areae\ Ellipt.}{f\sqrt{L}}$ (588). Poſita vero ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, eſt area elliptica $= \frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$. Tempus ergo vnius reuolutionis eſt $= \frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$.

Corollarium 10.

654. Si ergo plura corpora circa centrum virium C reuoluantur attracta in reciproca duplicatata ratione diſtantiarum; erunt tempora periodica inter ſe in ſeſquiplicata ratione axium tranſuerſorum ellipſium.

Corollarium II.

655. Si celeritas initialis in A euaneſcit, abit ellipſis in lineam rectam AC. In hac igitur recta corpus perpetuo mouebitur ab A ad C, hincque ſubito rurſus ad A reuertetur, ita vt nunquam vltra centrum C pertingat (272).

PROPOSITIO 81.

Problema.

656. *Poſita vi centripeta diſtantiarum quadratis reciproce proportionali, proiiciatur corpus ex* M *celeritate quacunque et iuxta directionem quamuis* MT: *ex quo oporteat determinari ellipſin* MDBHAM, *in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Sit MC$=y$, ſinus anguli CMT$=s$, et celeritas in M debita altitudini v, diſtantia a centro, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis, maneat $=f$. Haeque ſunt quantitates cognitae, ex quibus quaeſitae axis transuerſus AB, eius poſitio, et latus rectum debent definiri. Sit axis transuerſus $=$E, et latus rectum $=$L, reliquaeque litterae a, c, ſeruent ſuas ſignificationes, vt in praecedente propoſitione. Erit iam ex natura ellipſis FM$=$ E$-y$, ex quo fiet $v=\frac{(f^2-ac)(E-y)}{uy}$ (649) $=\frac{f^2(E-y)(2E-L\pm 2\sqrt{(E^2-EL)})}{y(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})^2}$ (652) $=\frac{f^2(E-y)}{Ey}$. Hinc reperitur E$=\frac{f^2y}{f^2-vy}$. Deinde eſt ſinus anguli CMT$=s=\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)y(E-y)}}$(650). At eſt $f^2-ac=\frac{f^2(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})}{2E}$

et

et $a^3c = \frac{1}{8}f^3L(E \pm \sqrt{}(E^2 - EL))$ (652), ex quo fit $\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2 - ac)}} = \frac{1}{2}\sqrt{}EL$, hincque $s = \frac{\sqrt{EL}}{2\sqrt{(Ey - y^2)}}$. Erit igitur axis coniugatus $DH = \sqrt{}EL = 2s\sqrt{}(Ey - y^2) = \frac{2sy\sqrt{vy}}{\sqrt{(f^2 - vy)}}$, et latus rectum $L = \frac{4s^2vy^2}{f^2}$. Ad poſitionem axis transuerſi inueniendum quaeratur coſinus anguli MCP ſeu $\frac{x}{y} = \frac{f^2y - 2a^2c}{y(f^2 - 2ac)} = \frac{2Ey - LE}{2y\sqrt{(E^2 - EL)}} = \frac{ff - 2ssvy}{\sqrt{(f^4 - 4ffssvy + 4s^2v^2y^2)}}$. Ex quo erit tangens ang. $MCP = \frac{2svy\sqrt{(1 - ss)}}{ff - 2ssvy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

657. Si eſt $f^2 > vy$ vel $v < \frac{f^2}{y}$ curua deſcripta ſemper erit ellipſis. At ſi $v > \frac{f^2}{y}$ curua erit hyperbola, fit enim axis transuerſus negatiuus. Sin autem $v = \frac{f^2}{y}$, curua erit parabola.

Corollarium 2.

658. Quia neque axis transuerſus neque latus rectum vllo caſu fieri poteſt imaginarium quomodocunque corpus proiiciatur; ideo ſemper in ſectione conica mouebitur, in cuius alterutro foco poſitum eſt centrum virium.

Scholion I.

659. Poſtquam *Keplerus* oſtendiſſet planetas in ellipſibus moueri, in quorum alterutro foco ſol eſſet poſitus; atque tempora eſſe proportionalia areis, quas rectae ad ſolem ductae cum arcu deſcripto compehenderent; *Neutonus* demonſtrauit vim planetas in orbitis continentem ad ſolem ten-

dere, atque eſſe quadratis diſtantiarum planetarum a ſole reciproce proportionalem. Haec eadem veritas ex hisce duabus propoſitionibus conſequitur; nam centro virium in ratione inuerſa duplicata distantiarum attrahente, corpora in ellipſibus vel hyperbolis moueri debebunt, quarum alteruter focus in centrum virium incidit.

Corollarium 3.

666. Secundum *Neutonum* vis attrahens ſolis eſt ad vim attrahentem terrae in aequalibus ab vtriusque centris diſtantiis vt 227512 ad 1. Quare cum vis attrahens terrae in diſtantia ſemidiametri ſuae a centro ſeu in ſuperficie aequalis ſit vi grauitatis 1; corpus a centro ſolis ſemidiametrum terreſtrem diſtans, ad id trahetur vi 227512 vicibus maiore quam grauitate. Ex quo concluditur, ſi corpus a centro ſolis diſtet 477 ſemidiametros terrae, vim, qua ad ſolem trahetur, fore aequalem vi grauitatis.

Corollarium 4.

667. Si igitur ſol locum centri virium in reciproca duplicata ratione diſtantiarum attrahentis ſuſtineat, pro f accipi debebit diſtantia 447 ſemidiametris telluris aequalis.

Scholion 2.

668. Quo hae propoſitiones ad motum planetarum poſſint accommodari ſit ſol in C et planeta moueatur in ellipſi ADBHA cuius axis transuerſus AB ſit $=E$, diſtantia focorum $CF=D$, et celeri-

tas,

tas, quam planeta habet in ſumma abſide A debita ſit altitudini c. Eritque $c = \frac{227512(E-D)}{(E+D)E}$. Iam pro mercurio eſt $E = 15991$ ſemid. telluris, quam menſuram hic conſtanter ad diſtantias exprimendas adhibebimus, $D = 3367$. Quare erit $c = 7, 368$. Pro Venere eſt $E = 29882$ et $D = 206$, vnde reperitur $c = 7, 598$. Pro Tellure eſt $E = 41312$ et $D = 743$. Vnde erit $c = 5, 323$. Pro *Marte* eſt $E = 62959$ et $D = 5887$, vnde fit $c = 3, 049$. Pro Ioue eſt $E = 214870$ et $D = 10350$, vnde $c = 0, 9633$. Pro Saturno eſt $E = 394042$, et $D = 22391$, vnde $c = 0, 5173$. Quae ſufficiunt ad cuiusque planetae motum abſolutum determinandum.

Scholion 3.

669. *Neutonus*, prout iam innuimus, ex ellipſi, quam corpus deſcribit, cognita, et centro virium in alterutro foco poſito, deduxit vim centripetam eſſe quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem. Poſt modum autem a Cel. *Ioh. Bernoulli* aliisque huius propoſitionis inuerſa fuit agitata, vt ſcilicet quaeratur curua, quam corpus circa centrum virium in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attrahens, deſcribet. Negabant enim a *Neutono* ſatis eſſe demonſtratum, praeter ſectiones conicas nullam aliam curuam quaeſito ſatisfacere, quamuis prop. XVII. Lib. I. Princ. Naturalis hoc ſatis clare euincere videatur. Huius igitur quaeſtionis his duabus quaeſtionibus plenam exhibuimus ſolutionem, qua *Neutoni* aſſertio extra dubium ponitur.

tur. Alias huius problematis ſolutiones videre licet in Comm. Acad. Pariſ. et Horis ſubſecivis Francof.

Scholion 4.

670. Tempus vnius reuolutionis planetae circa ſolem eſt $\frac{\pi E\sqrt{E}}{250f}$ minutorum ſecundorum (653) ſi quidem E et f in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimantur. Quia autem E et f commodius in ſemidiametris telluris exhibentur, quarum vnus continet 20302353 pedes; loco fractionis $\frac{1}{250}$ per quam $\frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$ multiplicandum eſt, adhiberi oportet 569, 945. Hanc ob rem tempus vnius reuolutionis planetae erit $\frac{569945\pi E\sqrt{E}}{1000f}$ minutorum ſecundorum, ſeu ob $\pi = 3,14159265 38$ et $f = 477$ ſemidiam. terrae, (667), erit tempus periodicum planetae $= 3,758.\ E\sqrt{E}$, minutorum ſecundorum, expreſſo axe tranſuerſo in ſemidiametris terrae.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

671. *Si vis centripeta fuerit reciproce vt cubus diſtantiae a centro; requiritur curua, quam corpus vtcunque proiectum deſcribet, corporisque motus in ea.*

Solutio.

Sit centrum in C et proiiciatur corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ et ſecundum directionem cum Ac facientem angulum cuius ſinus ſit $\frac{g}{a}$, poſita A C $= a$.

Per-

Peruenerit corpus in M, vbi ſit $CM=y$, et in tangentem MT ex C demiſſum perpendiculum $CT=p$. Celeritas vero in M debita ſit altitudini v. Atque diſtantia a centro C, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati, ſit $=f$. Hinc ergo erit vis centripeta in $M=\frac{f^3}{y^3}=P$ (601); ex quo prodit $Y=\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}$. Habebitur igitur pro curua quaeſita iſta aequatio $\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}=c-\frac{ch^2}{p^2}$. Atque cum ſit $v=\frac{ch^2}{p^2}$ (587), erit etiam $v=c-\frac{f^3}{2a^2}+\frac{f^3}{2y^2}$. Has aequationes per ſequentes caſus examinabimus.

I. Si fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, erit $\frac{1}{y^2}=\frac{h^2}{a^2p^2}$ ſeu $p=\frac{hy}{a}$. Tabula VI. Fig. 6. Perſpicitur autem ex hoc angulum CMT, cuius ſinus eſt $\frac{p}{y}$, aequalem fore angulo ad A. Quamobrem curua his caſibus deſcripta erit ſpiralis logarithmica, cuius centrum eſt in ipſo centro virium C. Ita autem corpus mouebitur in hac ſpirali, vt ſemper ſit $v=\frac{f^3}{2y^2}$ ſeu celeritas diſtantiae a centro reciproce proportionalis.

Si non fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, demittatur ex M in AC perpendicularis MP, et vocetur $CP=x$ atque $x=uy$. Habebitur igitur $\frac{du}{\surd(1-u^2)}=\frac{hdy\surd c}{y\surd(cy^2-ch^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}$ (601). Eſt vero u coſinus anguli ACM ſinu toto exiſtente $=1$. Radio igitur 1 ſi deſcribatur arcus circuli GN, erit $GN=-\int\frac{du}{\surd(1-u^2)}$. Vocetur autem $GN=t$, atque habebitur iſta aequatio $dt=-\frac{hdy\surd c}{y\surd(cy^2-ch^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}$.

 II. Sit

II. Sit $c = \frac{f^3}{2b^2}$, erit $dt = -\frac{abdy}{y^2\sqrt{(a^2-b^2)}}$, adeoque $t = C + \frac{ab}{y\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Conſtans vero C erit $= -\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quia euaneſcente t fit $y = a$. Sit autem tangens anguli ad $A = \theta$, eritque $t = \theta(\frac{a}{y} - 1)$ ſeu $y = \frac{\theta a}{t + \theta}$. Vnde ex dato angulo ACM reperitur recta CM, ideoque punctum M in curua quaeſita. Haec curua autem eſt ſpiralis hyperbolica, quam Cel. *Ioh. Bernoulli* pro eodem caſu ſatisfacientem inuenit in Act. Lipſ. 1713.

Si c neque $= \frac{f^3}{2a^2}$, neque $= \frac{f^3}{2b^2}$; ponatur $c = \frac{\delta f^3}{2a^2}$, erit $dt = \frac{-bdy\sqrt{\delta}}{y\sqrt{((\delta-1)y^2 + a^2 - \delta b^2)}}$. Ponatur $y = \frac{1}{q}$, erit $dt = \frac{bdq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta - 1 + (a^2-\delta b^2)q^2)}}$. Hinc duo oriuntur caſus primarii.

III. Si $a^2 - \delta b^2$ ſit numerus affirmatiuus, pendebit integratio a logarithmis. Erit enim $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{C}{\sqrt{(\delta - 1 + (a^2-\delta b^2)q^2)} - q\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{Cy}{\sqrt{((\delta-1)y^2 + a^2 - \delta b^2)} - \sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$. Atque determinata debito modo conſtante C erit $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{y\sqrt{\delta(a^2-b^2)} - y\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{a\sqrt{((\delta-1)y^2 + a^2 - \delta b^2)} - a\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$; atque $y =$

$$\frac{2ae^{\frac{t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}}(\sqrt{\delta(a^2-b^2)(a^2-\delta b^2)} - a^2 + \delta b^2).}{e^{\frac{2t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}} a^2(\delta - 1) - (\sqrt{\delta(a^2-b^2)} - \sqrt{(a^2-\delta b^2)})^2}$$

IV. Si $\delta > \frac{a^2}{b^2}$, erit $dt = \frac{bdq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta - 1 - (\delta b^2 - a^2)q^2)}}$. Integrale vero huius membri eſt $\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta b^2 - a^2)}}$ ductum in arcum circuli, cuius ſinus eſt $q\sqrt{\frac{\delta b^2 - a^2}{\delta - 1}}$ poſito radio $= 1$.

At-

Atque addita idonea conſtante erit $\frac{t\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}{b\sqrt{\delta}}$ = Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ — Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{a}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ = Arcui cuius ſinus eſt $\frac{D}{ay}(\sqrt{(a^2-D^2)}-\sqrt{(y^2-D^2)})$ poſito $\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}=D$. Hinc conſtructio curuae facilis fluit: ſumatur enim arcus GL, qui ad GN habeat rationem vt $\sqrt{(\delta b^2-a^2)}$ ad $b\sqrt{\delta}$. Huius arcus ſinus LR ponatur $=R$. Erit ergo $Ray=D\sqrt{(a^2-D^2)}-D\sqrt{(y^2-D^2)}$, atque $y=\frac{aDR\sqrt{(a^2-D^2)}-aD^2\sqrt{(1-R^2)}}{a^2R^2-D^2}$. Vnde et conſtructio et aequatio curuae quaeſitae deducitur. In his autem quatuor caſibus, omnia ad problema pertinentia continentur. Q. E. I.

Corollarium 1.

672. Diſtantia celeritates determinans reperitur $=\frac{a^2 f\sqrt{f}}{\sqrt{(f^3-2a^2c)}}$. Quare ſi $c=\frac{f^3}{2a^2}$, quo caſu corpus in ſpirali logarithmica mouetur, diſtantia celeritates determinans eſt infinita.

Corollarium 2.

673. Quia, ſi corpus in ſpirali logarithmica mouetur, eſt $p=\frac{by}{a}$ et $v=\frac{f^3}{2y^2}$, erit tempus, quo arcus AM abſoluitur $=\frac{a^3-ay^2}{f\sqrt{2f(a^2-b^2)}}$. Tabula V. Fig. 5.

Corollarium 3.

674. Si hoc tempus ponatur T, et coſinus anguli CMT$=i$, erit $y=\sqrt{(a^2-fiT\sqrt{2f})}$. Ex qua aequatione poſt quoduis tempus datum reperitur corporis a centro C diſtantia.

Corollarium 4.

675. Corpus igitur in ipſum centrum C perueniet tempore $T = \frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, dum interim reuolutiones infinitas circa C perfecerit.

Corollarium 5.

676. Si T capiatur maius quam $\frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, fit y imaginaria. Ex quo ſequitur, poſtquam corpus in C peruenerit, nusquam amplius reperiri, ſed quaſi annihilari.

Corollarium 6.

Tabula VI. Fig. 4. 677. Si ſit $\delta = \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c = \frac{f^3}{2b^2}$, corpus mouebitur in ſpirali hyperbolica, atque etiam poſt infinitas circa C peractas reuolutiones in ipſum centrum C perueniet tempore quoque finito. Eſt enim tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2\theta a(a-y)}{f\sqrt{2f}}$, ideoque tempus, quo corpus in C peruenit $= \frac{2\theta a^2}{f\sqrt{2f}}$.

Corollarium 7.

678. Si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c < \frac{f^3}{2b^2}$, qui erat caſus tertius, corpus in lineis ſpiralibus quoque mouebitur atque tandem poſt infinitos percurſos gyros in centrum C perueniet. Apparet hoc ex aequatione, nam facto $t = \infty$ demum fit $y = 0$.

Scholion 1.

679. Quando eſt $c = \frac{f^3}{2b^2}$, ſpiralis hyperbolica quam corpus deſcribit, hanc habet proprietatem,

tem, vt poſito $t = -\theta$ fiat $y = \infty$. Iſte igitur radius ex centro C ductus videtur eſſe curuae ex infinito accedentis aſymtotos. At potius curua ab eo perpetuo recedit, neque tamen vltra datum interuallum θa. Recta ergo ipſi huic radio parallela ab eoque interuallo θa diſtans erit vera aſymtotos. Huius praeterea curuae inſignis eſt proprietas, quod ex infinitis circulis concentricis arcus abſcindat aequales, ex qua natura et forma curuae magis elucet. Similem quoque proprietatem habent curuae, quae deſcribuntur, ſi $\delta < \frac{a^2}{b^2}$, ſimul vero $\delta > 1$. Fit enim $y = \infty$, ſi capiatur $t = -\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}\, l \frac{a\sqrt{(\delta - 1)}}{\sqrt{\delta}\,(a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$. Ex quo perſpicitur, ſi ſit $\delta < 1$, locum, quo fit $y = \infty$ fore imaginarium. At ſi $\delta = 1$, erit $t = -\infty$: curua enim hoc caſu orta eſt ſpiralis logarithmica. Ceterum omnes hae curuae ita ſunt comparatae, vt ſint vbique verſus C concauae, neque enim ex motus natura usquam habere poſſunt punctum flexus vel reverſionis.

Corollarium 8.

680. Si eſt $\delta > \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c > \frac{f^3}{2b^2}$, curua a corpore deſcripta non erit amplius ſpiralis, ſed algebraica, ſi quidem inter algebraicas etiam eae referantur in quarum aequationibus continentur exponentes irrationales.

Scholion 2.

681. Ad has igitur inueniendas oportet poni $b = a$ (640). Quo facto haec habebitur aequatio

 $dt =$

$dt = \frac{adq\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-a^2q^2)}}$. Seu poſito $aq = r$, et loco dt valore $\frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}}$, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-dr\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-r^2)}}$. Hac forma comparata cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (605), erit $Z = -r$, $A = 1$, $\lambda = \frac{\delta}{\delta-1}$. Habebitur propterea iſta aequatio $u =$

$$\frac{(\sqrt{(1-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}-r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}\ (\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}+r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}{2\sqrt{-1}}$$

Seu $2r\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)} - C\sqrt{-1}) - (\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})$ (605 et 607). Conſtans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$, ſeu $q = \frac{1}{a}$, ſeu $r = 1$. Determinata igitur C erit $2r = (u+\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}} + (u-\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}} = \frac{2a}{y}$, ſeu $u = \frac{1}{2y^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}((a+\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}} + (a-\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}) = \frac{x}{y}$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita.

Exemplum I.

682. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} = 2$, ſeu $\delta = \frac{4}{3}$, atque $c = \frac{2f^5}{3a^2}$. Erit $2xy = (a+\sqrt{(a^2-y^2)})^2 + (a-\sqrt{(a^2-y^2)})^2 = 4a^2 - 2y^2$. Ponatur applicata $PM = z$, fiet $x\sqrt{(x^2+z^2)} = 2a^2 - x^2 - z^2$, et ſumendis quadratis $0 = 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2z^2 + x^2z^2 + z^4$, ſiue $x = \frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$.

Haec

Haec curua igitur ad inſtar parabolae progreditur, ſed habet aſymtoton rectae AC parallelam et ab ea interuallo $2a$ diſſitam, quam nunquam attingit.

Exemplum 2.

683. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}=3$, ſeu $\delta=\frac{9}{8}$ et $c=\frac{9f^3}{16a^2}$. Oritur ergo $2xy^2=(a+\sqrt{(a^2-y^2)})^3+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^3=8a^3-6ay^2$. Atque inducta applicata $PM=z$, habebitur $x^3=4a^3-xz^2-3ax^2-3az^2$. Haec curua ordinis tertii pertinet ad ſpeciem 41 in enumeratione a *Neutono* facta.

Scholion 3.

684. Innumerabiles aliae inueniri poſſunt curuae algebraicae, quae a corpore proiecto in hac hypotheſi deſcribuntur, ſi ponatur $\delta=\frac{m^2}{m^2-1}$, denotante m numerum quemcunque rationalem vnitate maiorem ne fiat δ negatiuum. Hae autem tres hypotheſes pertractatae, quibus vis centripeta primo diſtantiis, ſecundo reciproce quadratis diſtantiarum et tertio reciproce cubis diſtantiarum eſt poſita proportionalis, ſunt ſolae, quae deducunt ad curuas vel algebraicas vel a circuli aut hyperbolae quadraturis pendentes; ſi quidem loco P potentia ipſius y ſubſtituatur. Quanquam autem in aliis poteſtatibus ipſius y loco P ſubſtitutis aequatio pro curua deſcripta non poteſt ab irrationalitate liberari, et hanc ob rem neque algebraica neque a quadratura circuli vel hyperbolae pendens eſſe poteſt; tamen dantur caſus ſpeciales, quibus curua quaeſita fit al-

ge-

gebraica. Namque quemadmodum linea recta et circulus in omnibus hypotheſibus ſatisfacere poſſunt; ita etiam quandoque aliae curuae algebraicae reperiuntur. Has autem quomodo inueniri oporteat in ſequenti propoſitione declarabimus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

685. *Exiſtente vi centripeta vt poteſtas diſtantiarum quaecunque, inuenire caſus ſpeciales, quibus corpus certo quodam modo proiectum in linea algebraica moueatur.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt hactenus, pro curua quaeſita inuenta eſt haec aequatio $\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{hdy\surd c}{y\surd(cy^2-cb^2-y^2Y)}$ (601). Noſtro autem caſu eſt $P = \frac{y^n}{f^n}$, denotante f diſtantiam, in qua vis centripeta grauitati aequatur. Hinc erit $Y = \int Pdy = \frac{y^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Deinde quia curuas algebraicas requirimus, ponimus $h = a$ (640). His ſubſtitutis erit $\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{ady\surd cf^n(n+1)}{y\surd((n+1)cf^n(y^2-a^2)-y^2(y^{n+1}-a^{n+1}))}$. Sit diſtantia celeritates determinans k, erit $c = \frac{k^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hac igitur loco c introducta erit

$\frac{du}{\surd(1-u^2)}$

$$\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{a\,dy\surd(k^{n+1}-a^{n+1})}{y\surd(a^{n+3}-a^2k^{n+1}+k^{n+1}y^2-y^{n+3})}.$$

Patet hinc ſi $k=a$, quo caſu fit $c=o$, fore $u=$ conſt. $=1$, ideoque $x=y$, qui eſt caſus, quo corpus recta deſcendit ad centrum. Si k eſt infinita, erit c quoque infinita, quoties $n+1$ eſt numerus affirmatiuus. Hoc igitur caſu corpus etiam in recta progredi debebit, quia vis finita corporis infinita celeritate moti directionem non valet mutare. Ponamus ergo $n+1$ eſſe numerum negatiuum $=-m$, ſeu $n=-m-1$, fiet

$$\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy\surd(k^m-a^m)}{\surd(a^{m-2}k^m+a^my^{m-2}-k^my^{m-2}-a^{m-2}y^m)}.$$

Fiat k infinite magna, erit $\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy}{\surd(a^{m-2}-y^{m-2})}$ euanescentibus reliquis terminis; et ponatur $y^{m-2}=q^2$, erit $y=q^{\frac{2}{m-2}}$. Hacque facta ſubſtitutione oritur ſequens aequatio $\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{2dq}{(m-2)\surd(a^{m-2}-q^2)}$. Qua formula comparata cum vniuerſali $\frac{\lambda dZ}{\surd(A^2-Z^2)}$ (604), erit $\lambda=\frac{2}{m-2}$, $A=a^{\frac{m-2}{2}}$ et $Z=q=y^{\frac{m-2}{2}}$. Emerget igitur iſta aequatio algebraica pro curua quaeſita, $2y^{\frac{m-2}{2}}\surd-1$ $=(\surd(1-u^2)+u\surd-1)^{\frac{m-2}{2}}(\surd a^{m-2}-C^2)+C\surd-1)-$

Oo (√

$(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{(a^{m-2}-C^2)}-C\sqrt{-1})$ (607). Conſtans C ex hoc determinatur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$. Hanc ob rem erit $2y^{\frac{m-2}{2}} = a^{\frac{m-2}{2}}((u-\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}}+(u+\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}})$. Quoties igitur m eſt numerus rationalis affirmatiuus, inuenitur curua algebraica, quam corpus normaliter proiectum exiſtente diſtantia celeritates determinante infinita, deſcribet. Q. E. I.

Corollarium 1.

686. Sumendis quadratis obtinebitur $4y^{m-2} -2a^{m-2}=a^{m-2}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{m-2}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{m-2})$ ſeu ob $m=-n-1$, haec aequatio $4y^{-n-3}-2a^{-n-3} =a^{-n-3}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3})$.

Corollarium 2.

687. Oportet eſſe m numerum affirmatiuum nihilo maiorem. Nam ſi eſſet m vel $=0$ vel numerus negatiuus, celeritas corporis foret infinita, et curua propterea linea recta.

Corollarium 3.

688. Si ſit $n=-2$, habebitur iſta aequatio $\frac{4a}{y}-2=2u=\frac{2x}{y}$, ſeu $2a=x+y$. Quae poſita applicata PM, $\sqrt{(y^2-x^2)}=z$ abit in hanc aequationem $z^2=4a^2-4ax$, pro parabola centro virium in foco poſito, vt iam inuenimus (647).

Co-

Corollarium 4.

689. Si $n=-3$ ſeu $m=2$, qui eſt caſus in praecedente propoſ. tractatus, erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=2a^{\frac{m-2}{2}}$ ſeu $y=a$. Curua ergo quam corpus deſcribet erit circulus, in cuius centrum ipſum centrum virium incidit.

Scholion 1.

690. Si n eſt numerus impar, erit m par ideoque $\frac{m-2}{2}$ integer. His igitur caſibus formula in ſolutione problematis inuenta vti coueniet. At ſi n fuerit par, formula (686) quadratis ſumtis producta debet adhiberi. Statim enim vtroque caſu ad aequationem rationalem inter x et y peruenitur vt in ſequentibus exemplis apparebit.

Exemplum 1.

691. Attrahat centrum in ratione reciproca quadruplicata diſtantiarum, et corpus normaliter proiiciatur exiſtente diſtantia celeritates determinante infinita; curua, quam corpus deſcribit erit algebraica ſequens. Ob $n=-4$ erit $4y-2a=2au=\frac{2ax}{y}$, ſeu $2y^2=a(y+x)$. Introducta vero applicata $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$ erit $2x^2+2z^2=ax+a\sqrt{(x^2+z^2)}$, quae aequatio eſt pro curua ordinis quarti.

Exemplum 2.

692. Sit vis centripeta reciproce in quintuplicata diſtantiarum ratione, ſeu $n=-5$ et $m=4$.

Habebitur ergo $2y = 2au = \frac{2ax}{y}$, atque $yy = ax = x^2 + z^2$, quae eſt aequatio ad circulum centro virium in eius peripheria poſito. Caſum hunc habet *Neutonus* in Princ. Lib. 1. Prop. VII.

Exemplum 3.

693. Sit $n = -7$, ſeu $m = 6$, erit $2y^2 = 4a^2u^2 - 2a^2$ ſeu $y^4 = 2a^2x^2 - a^2y^2$. Poſita applicata PM $= z$, prodibit iſta aequatio $(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - a^2z^2$, pro linea ordinis quarti, in qua centrum virium quoque in peripheriam incidit.

Scholion 2.

694. De figuris, quas corpora a datis viribus centripetis ſollicitata deſcribunt, hic plura addere operae non eſſet pretium, cum in Phyſica et Aſtronomia aliae virium centripetarum hypotheſes, niſi quae quadratis diſtantiarum reciproce eſt proportionalis, vſum habeant nullum. Quando tamen in Aſtronomia corpus a pluribus huiusmodi viribus ſollicitatum conſiderari debet, quarum vna prae reliquis maximam vim exercet, haec prout res poſtulat ne reliquas in computum ducere opus ſit, aliquantum vel augetur vel diminuitur, quo ſaltem quam fieri poteſt proxime motus illius corporis cognoscatur. His igitur caſibus curua, quam corpus deſcribit, non multum discrepabit ab ellipſi. Hanc ob rem Aſtronomi hanc curuam ad inſtar ellipſis contemplari ſolent, quae autem non eſt fixa ſed mobilis, ita vt corpus in ellipſi circa focum reuol-

uoluente moueri concipiant. Ex hocque oritur mobilitas orbitarum planetarum, qua lineae abſidum perpetuo in alium ſitum transferuntur. Nos vero quo propius ad veritatem accedamus praeter mobilitatem axis ellipſis etiam ſpeciem eius tanquam variabilem conſiderabimus. Ita igitur hac in re verſabimur, vt de quolibet elemento curuae, quam corpus deſcribit, determinemus, cuiusnam ellipſis focum in centro virium habentis ſit portio, ex quo tam poſitio quam ſpecies iſtiusmodi ellipſium innoteſcet. Omnes autem hae ellipſes alterutrum focum in ipſo centro virium poſitum habebunt, quia ad id punctum corpus perpetuo retrahitur.

PROPOSITIO 84.
Problema.

695. *Si vis centripeta non multum diſcrepat a ratione reciproca duplicata diſtantiarum; determinare motum ellipſis, eiusque continuam ſpeciei mutationem, atque corporis motum in iſta mutabili ellipſi.* Tabula VI. Fig. 5.

Solutio.

Sit centrum virium C, habeatque corpus in M ſecundum directionem MT celeritatem altitudini v debitam. Ponatur vis centripeta in M agens $=$P, diſtantia CM$=y$ et ſinus anguli CMT$=s$. Iam perſpicuum eſt, quamcunque legem teneat P, ſemper tamen aequari poſſe huic formae $\frac{f^2}{y^2}$, dummodo f

non quantitatem conſtantem vt hactenus, ſed variabilem denotet. Erit ergo $f^2 = Py^2$. Quia autem dum corpus elementum *Mm* percurrit f conſtans manet, poterit determinari ellipſis, cuius focus eſt C et elementum *Mm*, in qua corpus, ſi f perpetuo maneret conſtans, moueretur. Sit igitur AC huius ellipſis axis transuerſi poſitio, erit tangens anguli $MCA = \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$ (656), quae ergo erit $= \frac{2sv\sqrt{(1-ss)}}{Py-2s^2v}$. At latus rectum erit $= \frac{4s^2v}{P}$ et axis transuerſus $\frac{Py^2}{Py-v}$ (cit.). Ex centro C demittatur perpendiculum CT in tangentem MT, quod ponatur $= p$, erit $s = \frac{p}{y}$. Atque vbi perpendiculum in tangentem eſt $= h$, quod fiat in G poſita $CG = a$, ſit corporis celeritas debita altitudini c, ex quo erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589). Tangens vero $MT = \sqrt{(y^2-p^2)}$ ponatur breuitatis gratia $= t$. His poſitis erit tang. ang. $MCA = \frac{2ch^2t}{Py^2p-2ch^2p}$ et latus rectum $= \frac{4ch^2}{Py^2}$, transuerſum vero $= \frac{Py^2p^2}{Pyp^2-ch^2}$. Praeterea vero eſt ex natura attractionis $Pdy = \frac{2ch^2dp}{p^3}$ (587). Ex qua aequatione p in y poterit determinari, adeoque tota ellipſis ex ſolo y, et c et h. Sit iam CE linea fixa, cum qua angulus, quem recta CM conſtituit, ex natura curuae poteſt definiri. Ab hoc igitur angulo, ſi auferatur angulus MCA, habebitur inclinatio lineae abſidum AC in rectam fixam CG. Motus autem corporis ex cognita celeritate, $v = \frac{ch^2}{p^2}$ facile innoteſcet. Q. E. I.

Scho-

Scholion 1.

696. Ellipſis hoc modo determinata merito poteſt vocari ellipſis curuam oſculans ad ſimilitudinem circulorum oſculatorum, quibus curuedines linearum menſurantur. Haec vero conſideratio non eſt pure geometrica, ſed ad hanc ellipſin oſculantem inueniendam praeter curuae naturam noſſe oportet celeritatem corporis et vim centripetam.

Corollarium 1.

697. Si t euaneſcit linea abſidum AC ſeu poſitio axis ellipſis oſculantis incidit in radium CM, ob euaneſcentem angulum MCA.

Corollarium 2.

698. Si fuerit $P = \frac{2cb^2}{y^3}$, fiet angulus MCA rectus: Hoc igitur caſu erit vis centripeta vt cubus diſtantiae reciproce. Quare poſito $P = \frac{f^3}{y^3}$, erit $c = \frac{f^3}{2b^2}$. Curua autem, quae tum a corpore deſcribitur, eſt ſpiralis hyperbolica (679). Pro hac igitur curua linea abſidum perpetuo eſt normalis cum radio MC. At latus rectum ellipſis oſculantis erit $= 2y = 2MC$.

Corollarium 3.

699. Si fuerit $P = \frac{f^n}{y^n}$, erit $\int P dy = -\frac{f^n}{(n-1) y^{n-1}}$ $= C - \frac{cb^2}{p^2}$. Quia vero facto $y = a$ fieri debet $p = b$ erit $C = c - \frac{f^n}{(n-1) a^{n-1}}$. Hinc inuenietur

$p^2 =$

$p^2 = \frac{(n-1)c h^2 a^{n-1} y^{n-1}}{(n-1)c a^{n-1} y^{n-1} + f^n (a^{n-1} - y^{n-1})}$. Latus rectum ergo ellipſis oſculantis erit $\frac{4 c h^2 y^{n-2}}{f^n}$. Latus trauſuerſum et ang. MCA ex his etiam in y determinabuntur.

Corollarium 4.

700. Si fuerit $P = \frac{ch^2}{yp^2}$, ellipſis oſculans ſemper erit parabola. Fiet autem hoc valore loco P in aequatione $P dy = \frac{2ch^2 dp}{p^3}$ ſubſtituto $p^2 = \frac{h^2 y}{a}$. Et conſequenter $P = \frac{ac}{yy}$. Hoc autem caſu curua deſcripta haec ipſa eſt parabola ob $f^2 = ac$ (647).

Scholion 2.

701. Non confundenda eſt haec ellipſium oſculantium doctrina cum motu corporum in orbibus mobilibus, de quo *Neutonus* aliique poſt eum tractauerunt. Hoc enim loco determinauimus, cuiusnam ellipſis portio ſit quoduis elementum curuae a corpore deſcriptae. At, quando de orbibus mobilibus ſermo erit, inueſtigabitur vis centripeta efficiens, vt corpus in data curua circa centrum virium reuoluente moueatur.

PROPOSITIO 85.

Theorema.

Tabula VI. Fig. 6.

702. *Si corpus vtcunque proiectum attrahatur ad quotcunque centra virium* A, B, C, *quorum ſingulorum vires ſint diſtantiis ab ipſis proportionales*:

les: corpus eodem modo mouebitur ac ſi ad punctorum A, B, C, *commune centrum grauitatis* O *attraheretur pariter in ratione diſtantiarum ſimplici.*

Demonſtratio.

Poſitis centrorum A, B, C, viribus, quas in diſtantia 1 exercent, α, β, γ, reſpectiue, ſit *ac* directio motus, quam corpus in M habet, ideoque tangens curuae EMF deſcriptae in M. At ſit O centrum grauitatis corporum α, β, γ, in punctis A, B, C poſitorum, et in O concipiatur vis diſtantiis directe proportionalis, quae in diſtantia 1, attrahat vi $=\alpha+\beta+\gamma$. His poſitis corpus in M attrahetur ad A vi $AM.\alpha$, ad B vi $BM.\beta$, et ad C vi $CM.\gamma$. His autem viribus ſimul agentibus demonſtrandum eſt aequalem eſſe vim $OM.(\alpha+\beta+\gamma)$ corpus ad O trahentem. Ad hoc oſtendendum ex punctis A, B, C et O in tangentem *ac* demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c* et O*o*. Hoc modo quaelibet vis in normalem et tangentialem reſoluetur, eritque ſumma normalium ex viribus ad A, B, C tendentibus ortarum $=\alpha.Aa+\beta.Bb+\gamma.Cc$, ſumma vero tangentialium erit $=-\alpha.Ma+\beta.Mb+\gamma.Mc$. At quia O eſt centrum grauitatis corporum α, β, γ in A, B, C ſitorum, liquet ex ſtaticis fore $\alpha.Aa+\beta.Bb+\gamma\,Cc=(\alpha+\beta+\gamma).\,Oo$ et $-\alpha.Ma+\beta.Mb+\gamma.Mc=(\alpha+\beta+\gamma)\,Mo$. Ex quo perſpicitur viribus $\alpha.AM$, $\beta.BM$, $\gamma.CM$ coniunctis aequiualere vim $(\alpha+\beta+\gamma)OM$. Q. E. D.

Corollarium 1.

703. Corpus igitur in hac hypotheſi ellipſin deſcribet, cuius centrum in ipſo centro grauitatis O eſt poſitum (631). Omnes enim vires idem efficiunt, quod vnica in O poſita et attrahens in ratione directa diſtantiarum.

Corollarium 2.

704. Manifeſtum quoque eſt, quotcunque etiam ſint huiusmodi virium centra in ratione diſtantiarum attrahentia; ſemper tamen corpus in ellipſi motum iri, omnino ac ſi ad vnicum virium centrum in eorum communi centro grauitatis poſitum attraheretur.

Scholion 1.

705. Demonſtratio porro pari quoque modo ſuccedit, ſi illa quotcunque virium centra non ſint in eodem plano poſita, quemadmodum ex ſtaticis principiis cuique perſpectum eſſe poteſt. Hincque intelligitur, corpus nihilominus perpetuo in eodem plano moueri debere, etiamſi centra virium in diuerſisſimis planis ſint diſperſa.

Scholion 2.

706. Si centra virium in alia ratione quacunque praeter ſimplicem diſtantiarum ad ſe trahant, huiusmodi reductio ad vnicum virium centrum locum prorſus non habet, atque motus corporis calculo vix, re ipſa autem ne vix quidem poteſt

teſt determinari. His igitur in caſibus ad approximationes erit confugiendum, quae pro variis conditionibus diuerſimode ſunt inſtituendae. Atque hanc ob rem *Neutonus* verum lunae motum, qui ex duplici attractione oritur, determinare non ſuſcepit, ſed vero tantum proxime hoc praeſtare conatus eſt. Ad hoc autem opus eſt peculiaribus conſiderationibus, atque inuerſa methodus eſt adhibenda, qua ex curua, quam corpus deſcribit cognita, ad vires attrahentes receditur. Quamobrem, quae ſubſidia ad hoc inſtitutum afferri poſſunt, ea in ſequentibus, cum inuerſo ordine vim ſollicitantem tanquam incognitam ſumus inueſtigaturi, explicabimus. Ad hanc igitur tractationem progrediemur quae duplici modo inſtitui poteſt. Primo enim praeter curuam deſcriptam vt cognita ſumetur potentiae ſollicitantis directio in ſingulis locis, ex hisque quantitas potentiae ſollicitantis et ipſe corporis motus determinabitur. In altera contemplatione curua et corporis motus in ea pro datis accipientur, ex quibus potentiam ſollicitantem erui oportebit.

PROPOSITIO 86.
Problema.

707. *Inuenire legem vis perpetuo dorſum ſecundum rectas* MP *inter ſe parallelas tendentis, quae faciat, vt corpus in data curua* AM *moueatur; atque determinare corporis in ſingulis locis* M *celeritatem.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Per rectas MP ducatur normali AP, et vocetur AP, x et PM, y. Ponatur curua AM $= s$, et radius osculi MR in M $= r$, erit $r = \frac{dsdy}{ddx}$ ſumto ds pro conſtante. Porro debita ſit corporis in M celeritas altitudini v, et vis corpus in M trahens ſecundum MP ponatur P. Ex his habebuntur duae iſtae aequationes $dv = -\mathrm{P}dy$ et $\mathrm{P}rdx = 2vds$ (547), ex quibus ſi cognita eſſet v ſtatim appareret quantitas ipſius P. Eliminetur igitur P ad v inueniendum ex hac aequatione $rdxdv = -2vdsdy$, quae poſito loco r eius valore $\frac{ds\,dy}{ddx}$ abit in hanc $-\frac{dv}{v} = \frac{2ddx}{dx}$, quae integrata dat $lC - lv = l\frac{dx^2}{ds^2}$. Cognita autem ſit celeritas in puncto A, eaque debeatur altitudini c, atque ſit coſinus anguli MAP ſeu valor ipſius $\frac{dx}{ds}$ incidente puncto M in A $= \lambda$. Hinc ergo erit $lC = lc + 2l\lambda$ et conſequenter $v = \frac{\lambda^2 cds^2}{dx^2}$, vnde corporis in ſingulis locis M celeritas innoteſcit. Vis autem ſollicitans P reperietur $= \frac{2\lambda^2 cds^3}{rdx^3} = \frac{2\lambda^3 cds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue ſumto dx pro conſtante, quo caſu eſt $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$, erit $\mathrm{P} = \frac{-2\lambda^2 cddy}{dx^2}$. Tempus denique, quo arcus AM percurritur erit $= \int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

708. Quaecunque ergo ſit vis ſollicitans, corpus perpetuo aequabiliter ſecundum horizontem progreditur, ob tempus per AM proportionale ipſi AP, vti iam ſupra eſt obſeruatum (579).

Co-

Corollarium 2.

709. Si ex R in rectam MP productam demittatur perpendicularis RS, et ex S in MR quoque perpendiculum ST, atque denique tertium perpendiculum TV ex T in MS: erit $MV = \frac{rdx^3}{ds^3}$. Quare vis ſollicitans P ſe habebit ad vim grauitatis vt $2\lambda^2 c$ ad MV, ſeu P eſt reciproce vt MV.

Corollarium 3.

710. Si angulus ad A eſt rectus, fiet $\lambda = o$. Quo caſu corpus directe ſurſum aſcendere debebit. At ſi tantum ſit λ infinite paruum atque c infinite magnum, ita vt $2\lambda^2 c$ finitum habeat valorem, corpus in huiusmodi curua vtique moueri poterit.

Exemplum 1.

711. Sit curua AM circulus, cuius diameter poſita ſit in axe AP, et radius $= a$. Erit itaque $r = a$, et $ds : dx = a : y$. Hanc ob rem fiet $P = \frac{2\lambda^2 a^2 c}{y^3}$, et $v = \frac{\lambda^2 a^2 c}{y^2}$. Vis ergo corpus in M deorſum trahens eſt reciproce, vt cubus applicatae MP et celeritas reciproce vt haec ipſa applicata. Altitudo vero generans celeritatem in ſummo peripheriae puncto, vbi fit $y = a$ eſt $= \lambda^2 c$.

Exemplum 2.

712. Sit curua AMC parabola, cuius axis CB eſt verticalis et parameter $= a$. Ducatur horizontalis MQ, et ponatur $CQ = t$ et $MQ = z$, erit $z^2 = at$. Praeterea vero erit $dx = -dz$ et $dy = -dt$, Tabula VII. Fig. 2.

 et

et vt ante $\sqrt{(dt^2+dz^2)}=ds$. Quo circa fiet $v=\frac{\lambda^2 cds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2\lambda^2 cddt}{dz^2}$. Debita ſit celeritas in puncto ſummo C altitudini b, eritque ob $ds=dz$ in C, $\lambda^2 c=b$, ideoque $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto dz pro conſtante. Ex aequatione vero $z^2=at$ fit $dt=\frac{2zdz}{a}$ et $ddt=\frac{2dz^2}{a}$, atque $ds^2=dz^2(1+\frac{4z^2}{a^2})$. Conſequenter inuenitur $v=b(\frac{a^2+4z^2}{a^2})=b(\frac{a+4t}{a})$ et $P=\frac{4b}{a}$. Ex quo apparet potentiam deorſum tendentem, quae efficit, vt corpus in hac parabola progrediatur eſſe conſtantem. Quae igitur, ſi aequalis ſit grauitati $=1$, fiet $b=\frac{a}{4}=$ diſtantiae foci a vertice. Quae conueniunt cum ſupra inuentis (454 et ſqq.).

Exemplum 3.

Tabula VII. Fig. 3. 713. Sit curua *MAN* hyperbola centro C deſcripta habens axem CP verticalem. Ponatur ſemiaxis transuerſus AC$=a$, et ſemi coniugatus $=e$, atque CP$=t$ ac PM$=z$, ſitque inſuper altitudo celeritati quam corpus in A habet, debita $=b$, erit vt ſupra pro parabola fecimus, $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto dz conſtante. Eſt vero ex natura hyperbola $a^2z^2=-a^2e^2+e^2t^2$, ex qua fit $dt=\frac{a^2zdz}{e^2t}$ et $ddt=\frac{a^2dz^2}{e^2t}-\frac{a^2zdzdt}{e^2t^2}=\frac{a^2e^2t^2dz^2-a^4z^2dz^2}{e^4t^3}=\frac{a^4dz^2}{e^2t^3}$. Conſequenter erit $P=\frac{2a^4b}{e^2t^3}$, ſeu potentia corpus deorſum trahens vbique in *M* proportionalis eſt reciproce cubo diſtantiae *ML* puncti *M* ab horizontali *LC* per centrum C ducta. Porro erit $\frac{ds^2}{dz^2}=\frac{e^4t^2+a^4z^2}{e^4t^2}=\frac{(a^2+e^2)t^2-a^4}{e^2t^2}$. Atque praeterea habebitur $v=\frac{b(a^2+e^2)t^2-a^4b}{e^2t^2}$.

PRO-

PROPOSITIO 87.

Problema.

714. *Data curua AMB vna cum centro virium C inuenire legem vis centripetae, quae faciat, vt corpus in hac curua libere moueatur, vt et celeritatem corporis in loco quouis M.* Tabula VII. Fig. 4.

Solutio.

Quia curua AMB vna cum puncto C eſt data, quaeratur aequatio inter diſtantiam MC cuiusque curuae puncti M a centro C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem MT demittitur. Quare poſita $CM = y$ et $CT = p$ habebitur inter p et y aequatio. Iam ſit corporis in dato loco A celeritas debita altitudini c, atque perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum $= h$. Eorum vero, quae ſunt incognita, vocetur altitudo debita celeritati in $M = v$, et vis centripeta in $M = P$. His poſitis erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589), atque $P = \frac{2ch^2dp}{p^3dy}$ (592). Vel poſito radio oſculi in $M = r$ erit $P = \frac{2ch^2y}{p^3r}$ (592). Q. E. I.

Corollarium 1.

715. Tempus etiam, quo corpus quem vis Arcum AM abſoluit, erit $= \frac{2\,ACM}{h\sqrt{c}}$ ſeu erit proportionale areae ACM (588).

Corollarium 2.

716. Quia ch^2 eſt quantitas conſtans, erit vis centripeta in puncto quouis M proportionalis huic

va-

valori $\frac{dp}{p^3dy}$ ſeu huic $\frac{y}{p^3r}$. Celeritas vero Vv proportionalis eſt reciproce perpendiculo CT in tangentem MT demiſſo (589).

Exemplum 1.

717. Sit curua data ellipſis, et centrum virium C in ipſo eius centro poſitum. Vocetur eius ſemi axis transuerſus, a et ſemiaxis coniugatus, b erit ex natura ellipſis $p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}$. Habebitur ergo $dp = \frac{abydy}{(a^2+b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque $\frac{dp}{p^3dy} = \frac{y}{a^2b^2}$. Quocirca prodibit vis centripeta $P = \frac{2cb^2y}{a^2b^2}$, quae igitur proportionalis eſt diſtantiae corporis a centro.

Exemplum 2.

718. Sit curua data iterum ellipſis, at centrum virium C in eius alterutro foco poſitum. Ponatur eius axis transuerſus $= A$ et latus rectum $= L$, eritque ex natura ellipſis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Differentiando ergo fit $8pdp = \frac{A^2Ldy}{(A-y)^2}$. Quia vero eſt $16p^4 = \frac{A^2L^2y^2}{(A-y)^2}$ erit $\frac{dp}{2p^3} = \frac{dy}{Ly^2}$, et conſequenter $P = \frac{4cb^2}{Ly^2}$. Vis igitur centripeta reciproce erit proportionalis quadrato diſtantiae corporis a centro virium C.

Exemplum 3.

719. Sit curua ſpiralis logarithmica, et centrum virium in eius centro poſitum; erit $p = ny$ et $\frac{dp}{p^3dy} = \frac{1}{n^2y^3}$, ideoque $P = \frac{2cb^2}{n^2y^3}$. Quare vis centripeta erit reciproce vt cubus diſtantiae corporis a centro.

PRO-

PROPOSITIO 88.
Theorema.

720. *Vis tendens ad centrum* C, *quae facit, vt corpus in data curua* AM *moueatur, ſe habet ad vim tendentem ad aliud centrum* c, *quae facit, vt corpus in eadem curua et eodem tempore periodico moueatur, vt cubus rectae* cV *ex* c *ad tangentem* TM *parallele rectae* CM *ductae, ad ſolidum ex recta* cM *in quadratum rectae* CM. Tabula VII. Fig 5.

Demonſtratio.

Sit corporis celeritas in dato puncto A, cum corpus circa centrum virium C reuoluitur debita altitudini $\bar{c}$, et perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum $=b$. At cum corpus circa centrum virium c mouetur, ſit celeritas in A debita altitudini γ, et perpendiculum ex centro c in tangentem in A demiſſum $=\theta$. Quia autem tempora periodica circa vtrumque virium centrum ſunt aequalia erit $b\sqrt{c} = \theta\sqrt{\gamma}$ ſeu $cb^2 = \gamma\theta^2$ (715). Ex centro C et c porro in tangentem in M demittantur perpendicula CT et ct, ſitque radius osculi in $M = r$. His poſitis erit vis centripeta in M ad centrum C tendens, quam vocemus $P = \frac{2cb^2.CM}{r.CT^3}$. Atque vis centripeta in M ad centrum c tendens, quam vocemus $\Pi = \frac{2\gamma\theta^2.cM}{r.ct^3}$ (714). Quamobrem ob $cb^2 = \gamma\theta^2$ erit $P:\Pi = \frac{CM}{CT^3} : \frac{cM}{ct^3}$. Ducta autem cV parallela rectae CM erit, ob triangula TCM et tcV ſimilia, CT : ct = CM : cV. Hanc ob rem erit $P:\Pi = \frac{1}{CM^2} : \frac{cM}{cV^3} = cV^3 : cM.CM^2$. Q. E. D.

Corollarium 1.

721. In eodem puncto M erit celeritas corporis, dum ad virium centrum C attrahitur ad celeritatem, dum ad alterum centrum c attrahitur, reciproce vt CT ad ct, ſiue directe vt cV ad CM. Sequitur hoc ex eo, quod eſt $cb^2 = \gamma\theta^2$.

Corollarium 2.

722. Si tempora periodica non ſint aequalia, ſed ſint inter ſe vt T ad t; erit $T:t = \frac{1}{b\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ ſeu $cb^2 : \gamma\theta^2 = t^2 : T^2$. Conſequenter erit $P : \Pi = t^2. cV^3 : T^2. cM. CM^2$. Seu vires P et Π erunt in ratione compoſita ex ratione in theoremate aſſignata, et inuerſa duplicata temporum periodicorum.

Corollarium 3.

723. Eodem hoc caſu, quo tempora periodice ſunt inaequalia, erit celeritas in M centro virium in C poſito, ad celeritatem in M centro virium in c poſito in ratione reciproca compoſita ex ratione perpendiculorum CT et ct et ratione temporum periodorum $T : t$.

Scholion 1.

724. Propoſitionem hanc *Neutonus* deduxit ex Lib. I. prop. VII. in coroll. 3. Princ. eaque vtitur ad inueniendam vim centripetam tendentem ad punctum quodcunque ex cognita vi ad aliud quodpiam centrum trahente. Nos hic vſum eius in vnico exemplo ſequente oſtendemus.

Ex-

Exemplum.

725. Sit curua data circulus AMc, alterumque centrum virium poſitum ſit in ipſo circuli centro C. Vis igitur centripeta P ad C tendens vbique erit conſtans, dicaturque g. Ex hac quaeratur vis ad centrum virium c in peripheria ſitum tendens Π, faciensque, vt corpus eodem tempore periodico in circulo moueatur. Demittatur ergo ex c in tangentem MV perpendiculum CV, quod ex natura circuli ſimul parallelum erit rectae CM. Quamobrem erit $g : \Pi = cV^3 : cM . CM^2$, ideoque $\Pi = \frac{g . cM . CM^2}{cV^3}$. Ducatur recta AM erunt triangula cVM, cMA ob ang. $cMV = cAM$, ſimilia; et propterea $cV : cM = cM : cA$. Habetur ergo $cV = \frac{cM^2}{2 CM}$, ex quo fit $\Pi = \frac{8 g . CM^5}{cM^5}$. Eſt igitur haec vis Π reciproce vt poteſtas quinta diſtantia Mc corporis a centro virium c, vt iam ſupra (692) eſt inuentum. Tabula VII, Fig. 6.

Corollarium 4.

726. Sit celeritas corporis in peripheria circuli circa centrum C reuoluentis debita altitudini c, et celeritas corporis in M circa centrum virium c reuoluentis debita altitudini v. Eritque $\sqrt{c} : \sqrt{v} = cV : CM = cM^2 : 2 . CM^2$ (721) ſeu $v = \frac{4 c . CM^4}{cM^4}$. Quamobrem celeritas corporis circa centrum c reuoluentis erit vbique reciproce vt quadratum diſtantiae eius ab c.

Corollarium 5.

727. Quia centro virium in centro circuli C exiſtente, eſt $h=y=p=r=$ radio CM; erit $F=g=\frac{2c}{CM}$ (592). Hanc ob rem fiet poſito $\Pi=\frac{f^5}{CM^5}$, $g=\frac{f^5}{8.CM^5}$, et $c=\frac{f^5}{16.CM^4}$. Ideoque $v=\frac{f^5}{4.CM^4}$.

Scholion 2.

728. In his propoſitionibus poſuimus curuam, quam corpus deſcribit, abſolute eſſe datam et aequationem pro ea haberi. Sed dantur etiam caſus, quibus curua ipſa quam corpus deſcribit non datur, ſed ex certis conditionibus ad ipſum motum ſpectantibus ante debet inueniri, quam lex vis centripetae poteſt determinari. Hucque pertinent, quae paſſim tradita ſunt de motu corporum in orbibus mobilibus, qua de re igitur in ſequenti propoſitione tractabimus.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 1. 729. *Si orbita* (A) (M) (B) *vtcunque reuoluatur circa centrum virium* C; *oportet definiri vim centripetam perpetuo ad* C *tendentem, quae faciat vt corpus in hac orbita mobili moueatur.*

Solutio.

Dum orbita ex ſitu (A) (M) (B) in ſitum AMB peruenit, ponatur corpus interea ex (A) in M perueniſſe, ita vt corpus interea in orbita angulum (A)C(M)=ACM, reuera autem angulum (A)CM

=(A)

$=$(A)C(M)$+$(A)CA deſcripſerit. Exiſtente initio corpore in (A) ſit eius celeritas vera non ea, quam in orbita habet, debita altitudini c, et recta C(A), quae tam in orbitam quam in veram curuam, in qua corpus mouetur, ſit perpendicularis $=a$. Porro ſit celeritas corporis in M, quatenus in orbita mouetur, debita altitudini u, et vera corporis celeritas in M debita altitudini v. At celeritas angularis in orbita ſit ad veram celeritatem angularem circa C, dum corpus in M verſatur, vt 1 ad w. In orbita igitur tanquam immobili ſpectata elementum $(M)(m)$ celeritate $\sqrt{u}$ deſcribetur. Ponatur diſtantia C$(M)=$C$M=y$, et perpendiculum in tangentem orbitae in (M) vel M ex C demiſſum, C(T) $=$CT$=p$, habebiturque ob orbitam datam aequatio inter p et y. Iam dum corpus in orbita elementum Mm deſcribit, progrediatur ipſa orbita motu angulari circa C per angulum $=m$Cμ, et hanc ob rem corpus reipſa non in m, ſed in μ reperietur, ſumto C$\mu=$Cm, atque idcirco interea elementum $M\mu$ deſcripſiſſe cenſendum eſt, id quod fecit celeritate debita altitudini v. Erit itaque $M\mu : Mm = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, atque centro C deſcripto arculo $M\nu$ (ob datam motuum angularium circa C in orbita et reuera rationem $1 : w$) erit $Mn : M\nu = 1 : w$. Eſt vero poſita tangente $MT = \sqrt{(y^2-p^2)} = q$, $Mm = \frac{ydy}{q}$, et $Mn = \frac{pdy}{q}$. Quo circa habebitur $M\mu = \frac{ydy\sqrt{v}}{q\sqrt{u}}$, et $M\nu = \frac{wpdy}{q}$. Ex quo ob $\mu\nu = mn = dy$ prodibit $1 + \frac{w^2p^2}{q^2} = \frac{vy^2}{uq^2}$ ſeu $vy^2 = uq^2 + w^2up^2$. Quia $M\mu$ eſt elemen-

mentum verae curuae, quam corpus deſcribit, demittatur in hoc productum ex C perpendiculum $C\Theta$, eritque $M\mu : M\nu = CM : C\Theta$, vnde fit $C\Theta = \frac{wp\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim $v = \frac{a^2cv}{w^2up^2}$ (589) ideoque $u = \frac{a^2c}{w^2p^2}$ et $v = \frac{a^2c(q^2+w^2p^2)}{w^2p^2y^2}$. His loco u et v poſitis valoribus, erit $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(q^2+w^2p^2)}}$, quam breuitatis gratia vocemus π. Ex hac autem π cognita innotescit ipſa vis centripeta P, quae facit vt corpus in hac data orbita, hocque modo mobili moueatur. Namque erit $P = \frac{2a^2cd\pi}{\pi^3dy}$ (592). At ob $\pi^2 = \frac{w^2p^2y^2}{q^2+w^2p^2}$, erit $\frac{1}{\pi^2} = \frac{q^2}{w^2p^2y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{w^2y^2} + \frac{1}{w^2p^2}$, ideoque $-\frac{2d\pi}{\pi^3} = -\frac{2dy}{y^3} + \frac{2dw}{w^3y^2} + \frac{2dy}{w^2y^3} - \frac{2dw}{w^3p^2} - \frac{2dp}{w^2p^3}$ ſeu $\frac{d\pi}{\pi^3} = \frac{dy(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2q^2} + \frac{dp}{w^2p^3}$. Conſequenter habebitur $P = \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{2a^2cq^2dw}{w^3y^2p^2dy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

730. Poſito radio $=1$, eſt $\frac{m\mu}{CM} = \frac{(w-1)pdy}{qy}$ elementum anguli (A)CA quem orbita confecit dum corpus arcum (A)(M) percurrit. Hanc ob rem erit ang. (A)CA $= \int \frac{(w-1)pdy}{qy}$. Eſtque $w-1 : 1$ vt celeritas angularis orbitae, ad celeritatem angularem corporis, dum eſt in M, in ipſa orbita.

Corollarium 2.

731. Celeritas corporis in orbita, quae eſt vt $\sqrt{u}$, reciproce proportionalis eſt ipſi wp. Ergo, niſi w ſit conſtans, fieri non poteſt, vt corpus hoc mo-

modo in orbita quieſcente moueatur, attractum ad centrum C.

Corollarium 3.

732. Poſito igitur w conſtante, i. e. ratione motus angularis corporis ad motum angularem orbitae perpetuo eadem, erit etiam celeritas corporis in orbita $\sqrt{u}$ reciproce proportionalis perpendiculo C(T) in tangentem. Atque vis centripeta ad C tendens, atque efficiens vt corpus hac ratione in orbita quieſcente moueatur erit $=\frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy}$. Sit enim celeritas reſpectu orbitae quam corpus in (A) habet, debita altitudini γ, erit $\sqrt{\gamma}:\sqrt{c}=1:w$ (*p. hyp.*) atque $c=w^2\gamma$, ex quo vis centripeta ad C tendens, faciensque vt corpus in orbita quieſcente moueatur, erit $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, vt etiam ex ſupra traditis inuenitur (592).

Corollarium 4.

733. Angulus igitur (A)CA in hac hypotheſi, qua w ponitur conſtans, qui ab orbita abſoluitur, dum corpus arcum (A)(M) percurrit, erit $=(w-1)\int\frac{pdy}{qy}=(w-1)$ *ang.* (A)C(M). Ergo vna tota corporis in orbita reuolutione, ipſa orbita circa C gyrabitur angulo $(w-1)$ 360 graduum.

Corollarium 5.

734. Vis autem, quae efficit, vt corpus in hac orbita mobili proportionaliter motui angulari in ipſa orbita, moueatur erit $=\frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy}+\frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3}$

ſeu

ſeu $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Quare differentia inter vim centripetam pro orbita immobili et vim pro orbita mobili reciproce proportionalis eſt cubo diſtantiae corporis a centro virium C.

Corollarium 6.

735. Si ſit $w=1$, erit $w-1=o$, motusque orbitae nullus, quo caſu etiam vis centripeta fit $= \frac{2\,{}^2\gamma dp}{p^3 dy}$ euanescente altero termino. Idem euenit ſi $w=+1$ ſeu $w-1=-2$, quo caſu orbita in antecedentia mouetur duplo velocius, quam ipſum corpus in orbita ingreditur. At vera curua, quae hoc motu a corpore deſcribitur, non differt ab orbita, niſi quod ſit inuerſa.

Corollarium 7.

736. Si $w>1$ orbita in conſequentia mouetur qui motus, quo ſit maior, eo maior etiam erit vis centripeta. At ſi $w<1$, orbita in antecedentia tendit, et vis centripeta fit minor, ob w^2-1 negatiuum.

Corollarium 8.

737. Si $w=o$ fit etiam $c=o$, corpusque in recta linea mouebitur, quia motus angularis orbitae hoc caſu aequalis fit et contrarius motui angulari corporis in orbita.

Corollarium 9.

738. Si w eſt numerus negatiuus, nempe $=-n$, corpus in eadem mouebitur curua ac ſi eſſet

$w=$

$w = +n$, hoc tantum diſcrimine, quod corpus in contrarias plagas progrediatur. Et hanc ob rem vis centripeta eundem retinet valorem, ſiue w affirmatiue ſiue negatiue accipiatur. Idem etiam vniuerſaliter, ſi w eſt quantitas variabilis, obtinet.

Exemplum.

739 Sit curua (A)(M)(B) ellipſis, et centrum virium C eius alteruter focus. Ponatur eius latus rectum $= L$ et axis transuerſus $(A)(B) = A$; erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\surd(A^2 - AL)$, et $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Sit praeterea w conſtans, erit vis, quae facit vt corpus in hac ellipſi mobili moueatur $= \frac{4a^2\gamma}{Ly^2} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Angulus vero (A)CA, quem orbita abſoluit, dum corpus in ea arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1)(A)C(M)$ (733). Aequatio vero pro ipſa curua, quam corpus deſcribit, cuius elementum eſt $M\mu$, habebitur inuenienda aequatione inter $CM = y$, et $C\Theta = \pi$. Eſt autem $pp = \frac{ALy}{4A-4y}$, et $qq = \frac{4Ay^2 - 4y^3 - ALy}{4A - 4y}$, qui valores in aequatione $\pi = \frac{wpy}{\surd(qq + w^2p^2)}$ ſubſtituti dabunt aequationem pro ipſa curua deſcripta hanc $\pi\pi = \frac{w^2ALy^2}{4Ay - 4y^2 + (w^2-1)Ay}$.

Scholion I.

740. Curuae ipſae, quas corpora a huiusmodi viribus centripetis ſollicitata deſcribunt, difficillime alias cognoſcerentur, earumque forma hac conſideratione non adhibita nequaquam poſſet

 de-

determinari. Maximam igitur habent vtilitatem huiusmodi virium centripetarum inueſtigationes pro curuis ex datis vtcunque generatis, quo reciproce ex viribus centripetis datis ipſae curuae earumque proprietates innoteſcant. Occurrunt enim in motibus corporum coeleſtium tam complexae virium ea ſollicitantium expreſſiones, vt omnino eorum orbitae determinari nequeant, niſi forte illae vires comprehendantur in tali quodam caſu, de quo a poſteriori vis centripeta eſt inuenta.

Scholion 2.

741. Si corpus in huiusmodi orbita mobili moueri deprehenditur, motus eius et diſtantia quouis tempore a centro C poterit determinari. Atque quoties corpus in orbita in puncta (A) et (B) peruenit, tum in minima vel maxima a C erit diſtantia. Quare cum motus gyratorius lineae (A)(B), quae linea abſidum vocatur, ſit datus; definiri poterit, quando corporis a centro C diſtantia ſit maxima vel minima. *Neutonus* hanc rem pertractauit in princ. Libro 1. tota Sect. IX. eaque theoria vtitur ad motum lineae abſidum orbitae lunaris determinandum. Sed minus accurate haec conſideratio ad lunam accommodari poteſt, cum vis lunam ſollicitans non ad punctum quoddam fixum C, vt hic poſuimus, ſed perpetuo variabile tendat. Operam igitur dabimus, vt, poſtquam reliqua huc pertinentia explicauerimus, alias propoſitiones magis idoneas afferamus, quae ad motum lunae transferri queant.

PRO-

PROPOSITIO 90.

Problema.

742. *Cognita curua, quam corpus vi quacunque centripeta* V *ſollicitatum deſcribit, determinare curuam, quam corpus a vi centripeta* $V+\frac{C}{y^3}$ *(denotante* y *diſtantiam* MC *corporis a centro virium* C*), ſollicitatum deſcribet.*

Solutio.

Agente vi centripeta $V+\frac{C}{y^3}$, ſit corporis celeritas, qua in (A) ſecundum directionem ad radium C(A) normalem proiicitur, debita altitudini c, et ponatur $C(A)=a$. Vrgente autem vi V, ſit (A)(M)(B) orbita, in qua corpus mouebitur proiectum in (A) ſecundum eandem directionem, ſed celeritate debita altitudini γ. Iam ex praecedente propoſitione manifeſtum eſt, vi $V+\frac{C}{y^3}$ effici, vt corpus in eadem orbita (A)(M)(B), ſed circa centrum C in data ratione ad motum angularem in ipſa orbita mobili, moueatur. Sit igitur $w-1$ ad 1 vt motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in ipſa orbita dum eſt in M, et ſit etiam $c=w^2\gamma$ (732), atque vocetur perpendiculum ex C in tangentem orbitae in M demiſſum $CT=p$. Hinc perſpicuum eſt, vim centripetam facientem, vt corpus in orbita immobili (A)(M)(B) moueatur, fore $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, ideoque $V=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, quam aequationem ergo ob datam curuam (A)(M)(B) conſtruibilem ponimus (*p. hyp.*). Vis autem efficiens, vt corpus

in eadem orbita deſcripto modo mobili moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Quamobrem habebitur $V + \frac{C}{y^3} = \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Ex quo prodit $C = 2a^2\gamma(w^2-1) = \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2}$ atque $w^2 = \frac{2a^2c}{2a^2c-C}$. Erit ergo $w - 1 : 1 = \frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}} : 1$ atque $\gamma = \frac{2a^2c-C}{2a^2}$. Inuenta igitur curua, quam corpus in (A) celeritate altitudinis $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum deſcribit ſollicitatum a vi V, vis $V + \frac{C}{y^3}$ efficiet, vt corpus in (A) celeritate $\sqrt{c}$ proiectum moueatur in eadem orbita mobili ita, vt ſit motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in hac orbita, quemadmodum eſt $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ ad 1. Motus autem corporis in ipſa orbita idem erit, quem habet in orbita immobili a vi tantum V ſollicitatum et in (A) celeritate debita altitudini $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum, qui motus per hypotheſin eſt cognitus. Q. E. I.

Corollarium 1.

743. Dum igitur corpus in orbita ex (A) ad (B) peruenit, ſeu circa centrum C angulo 180 gr. reuoluitur, ipſa orbita interea angulo $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$. 180 grad. circa C gyrabitur.

Corollarium 2.

764. Si igitur recta (A)(B) eſt linea abſidum, erit punctum (A) ima, punctum (B) vero ſumma abſis, vti in aſtronomia vocantur; corpus igitur ab abſide ima ad ſummam perueniet abſoluto motu angulari circa C gradus $\frac{180}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$.

Co-

Corollarium 3.

745. Tempus, quo corpus in orbita mobili ex (A) in *M* peruenit, aequatur tempori quo in quiescente ex (A) in (*M*) pertingit. Angulus vero (A)C*M* ſe habet ad ang. (A)C(*M*) vt w ad 1 i. e. vt $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$ ad 1.

Exemplum.

746. Sit vis V reciproce proportionalis quadrato diſtantiae a centro ſeu $V=\frac{ff}{yy}$, erit curua (A)(*M*)(B) ellipſis, in cuius foco poſitum eſt centrum virium C. Sit eius axis transuerſus (A)(B)=A, et latus rectum =L, erit $a=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}=$(A)C et (B)C$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}$. Ob $4pp=\frac{ALy}{A-y}$ erit $\frac{2a^2ydp}{p^3dy}=\frac{4a^2y}{Ly^2}=\frac{ff}{yy}$. Hinc fit $4a^2y=Lff=4a^2c-2C$, vnde $L=\frac{4a^2c-2C}{ff}$. Atque $c=\frac{Lff+2C}{4a^2}$. Quae eſt altitudo debita celeritati corporis in (A) pro orbita mobili ex vi centripeta $\frac{ff}{y^2}+\frac{C}{y^3}$. Motus vero angularis orbitae erit ad motum angularem corporis in orbita vt $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}-\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}$ ad 1. Atque corpus ab abſide ima ad ſummam perueniet, poſtquam motu angulari ang. $\frac{180\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}=180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. abſoluerit.

PROPOSITIO 91.

Problema.

747. *Si figura, quam corpus a quacunque vi centripeta deſcribit, non multum differt a circulo, determinare motum abſidum.*

Solutio.

Comparandus eſt huiusmodi motus cum motu corporis in ellipſi mobili parum excentrica cuius focus alteruter poſitus ſit in centro virium. In hac igitur orbita quieſcente corpus mouebitur ſollicitatum a vi centripeta quadratis diſtantiarum reciproce proportionali. In eadem vero orbita mobili corpus mouebitur, ſi fuerit vis centripeta $=\frac{ffy+C}{y^3}$ (746). Manentibus praecedentibus denominationibus ponatur $y=a+z$, erit z reſpectu ipſius a valde paruum, quia curua a corpore deſcripta circulo proxima ponitur. Quare vis centripeta illa erit $=\frac{aff+C+ffz}{y^3}$, et $2a$ quam proxime erit aequalis ipſi lateri recto L. Iam ponatur vis centripeta corpus ſollicitans $=\frac{P}{y^3}$ in qua P ſit functio quaecunque ipſius y. Ponatur in P loco y eius valor $a+z$ abeatque P reiectis terminis, in quibus z plus vna habet dimenſionem, ob z tam paruum in $E+Fz$. Hac ergo formula cum $aff+C+ffz$ comparata habebitur $F=ff$, ſeu $f=\sqrt{F}$ et $aF+C=E$, ſeu $C=E-aF$. His ſubſtitutis corpus ab hac vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ſollicitatum ab abſide ima ad ſummam perueniet, abſoluto

to motu angulari angulo $180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. (746). Seu poſito $2a$ loco L, et F loco ff atque E$-a$F loco C erit iſte angulus graduum $180\sqrt{\frac{E}{aF}}$. Si quidem orbita non multum a circulari diſcrepat. Q. E. I.

Corollarium 1.

748. Linea vero abſidum (A)(B), dum corpus circa C reuoluitur angulo 360 gr. mouebitur motu angulari per angulum $\frac{\sqrt{E}-\sqrt{aF}}{\sqrt{E}}$ 360 grad. Motus enim angularis orbitae proportionalis ponitur motui angulari corporis, ob vim centripetam $=\frac{ff}{yy}+\frac{C}{y^3}$ (734).

Corollarium 2.

749. Quia E eſt functio talis ipſius a, qualis P eſt ipſius y, erit Fz incrementum ipſius E creſcente a elemento z. Quare poſito $z=da$ erit Fda $=d$E, ideoque, angulus, quo corpus ab abſide ima ad ſummam peruenit eſt $=180\sqrt{\frac{Eda}{adE}}$ grad.

Corollarium 3.

750. Quia E talis eſt functio ipſius a, qualis P ipſius y, poterit in $\frac{Eda}{adE}$ poni y loco a et P loco E. Quamobrem exiſtente vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, corpus ab abſide ima ad ſummam perueniet abſoluto angulo $180\sqrt{\frac{Pdy}{ydP}}$ graduum. Atque in hac expreſſione ſi reſtet y, poterit eius loco a ſcribi, quippe parum ab y diſcrepans.

Co-

Corollarium 4.

757. Si fuerit $\frac{da}{a} > \frac{dE}{E}$ ſeu $\frac{dy}{y} > \frac{dP}{P}$, ellipſis motu ſuo verum corporis motum exprimens mouebitur in conſequentia. Sin vero $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea abſidum in antecedentia mouebitur. At ſi $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ ſeu $P = ay$, quo caſu vis centripeta reciproce proportionalis eſt quadratis diſtantiarum, linea abſidum quieſcet, ſeu corpus, poſtquam motu angulari angulum 180 gr. abſoluerit ab abſide ima ad ſummam et viciſſim pertingit.

Corollarium 5.

725. Dato autem angulo, quo corpus ab abſide altera ad alteram peruenit qui ſit 360μ grad. erit $\mu^2 = \frac{Pdy}{ydP}$ ideoque $P^{\mu\mu} = ay$, ſeu $P = ay^{\frac{1}{\mu\mu}}$. Vis ergo centripeta quae facit, vt lineae abſidum tantus ſit motus, erit $y^{\frac{1-3\mu^2}{\mu^2}}$.

Corollarium 6.

763. Si accidit vt $\frac{Pdy}{ydP}$ ſeu dP fiat negatiuum, motus abſidum erit imaginarius. Ex quo cognoſcitur corpus nunquam ad abſidem alteram peruenire poſſe ab altera progreſſum. Sed perpetuo vel magis receſſurum a centro vel ad id acceſſurum, ſiue in orbita clauſa prorſus non moueri.

Corollarium 7.

754. Si vis centripeta proportionalis ſit diſtantiarum poteſtati y^n, erit $P = y^{n+3}$. Quare fiet

$\frac{Pdy}{ydP}$

$\frac{\xi dy}{ydp} = \frac{1}{n+3}$, atque corpus ab abſide ima ad ſummam perueniet abſoluto angulo circa C graduum $\frac{180}{\sqrt{(n+3)}}$; a ſumma vero vel ima abſide ad eandem reuertetur abſoluto angulo $\frac{360}{\sqrt{(n+3)}}$ grad.

Corollarium 8.

755. Si ergo fuerit $\sqrt{(n+3)}$ numerus rationalis, et m minimus numerus integer, quo fiat $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ quoque numerus integer; tum corpus poſt $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ reuolutiones circa centrum C peractas in idem punctum incidet, totidemque curua a corpore deſcripta abſoluet ſpiras, antequam in ſe ipſam redeat atque claudatur. At ſi $n+3$ non eſt quadratum curua nunquam in ſe redibit, ſed infinitas circa centrum C habebit ſpiras, neque vnquam corpus in eandem viam reuertetur.

Exemplum 1.

756. Attrahat centrum virium in ratione reciproca triplicata diſtantiarum, erit $n+3=0$. Hac ergo hypotheſi corpus ab altera abſide egreſſum, ad alteram niſi infinitis reuolutionibus peractis non perueniet. Atque ſi vis centripeta in maiore ratione quam triplicata diſtantiarum decreſcat curua prorſus non habebit duas abſides ſed vel in infinitum abibit, vel in ipſo centro, vt ſpiralis logarithmica terminabitur.

Exemplum 2.

757. Si vis centripeta eſt quadratis diſtantiarum reciproce proportionalis erit $n+3=1$. Quare tum corpus motu angulari abſolutis 180 gr. ab altera abſide ad alteram perueniet, et curua poſt quamuis reuolutionem in ſe ipſam redibit. Corpus enim in ellipſi in cuius alterutro foco centrum virium eſt poſitum mouebitur, eiusque axis transuerſus eſt ipſa linea abſidum.

Exemplum 3.

758. Sit vis centripeta diſtantiis reciproce proportionalis, eſt $n+3=2$. Corpus igitur ab abſide ima ad ſummam perueniet abſoluto angulo $\frac{180}{\sqrt{2}}$ grad. ſeu 227 gr. 16′. Orbita vero ob $\sqrt{2}$ irrationale nusquam in ſe redibit.

Exemplum 4.

759. Si vis centripeta eſt conſtans in omni diſtantia, erit $n=0$. Hoc ergo caſu corpus ab altera abſide egreſſum ad alteram perueniet motu angulari percurſo angulo $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grad. i. e. 103 gr. 55′, quam proxime.

Exemplum 5.

760. Si vis centripeta eſt directe, vt corporis a centro diſtantia, quo caſu corpus in ellipſi moueri conſtat, in cuius centro centrum virium eſt poſitum (631). Abſis igitur ima ab ſumma diſtabit angulo 90 grad. Idem vero ex hac regula deducitur; nam ob $n=1$, erit $\frac{180}{\sqrt{n+3}}=90$.

Scho-

Scholion 1.

761. Quoties igitur corpus circa centrum virium tanta velocitate proiicitur, vt fere in circulo deberet reuolui, ope huius propoſitionis vera curua, quam corpus deſcribet poteſt determinari, id quod ex ſola vis centripetae conſideratione fieri non poteſt. Ex quibus eo magis huiusmodi contemplationum vſus perſpicitur, cum res, quae alias determinatu eſſent difficillimae ex iis facile definiantur. *Neutonus* eandem hanc propoſitionem expoſuit Sect. IX. prop. 45.

Scholion 2.

762. Iam ſupra oſtendimus corpus in hypotheſi vis centripetae cubo diſtantiae reciproce proportionalis ad centrum descendens ad id tempore finito peruenire, neque deinde ex eo egredi ſed quaſi ſubito annihilari (675) (676). Idem etiam valet, ſi corpus recta ad centrum descendat. Atque ſimili modo, ſi vis centripeta in maiore quam triplicata diſtantiarum ratione decrescat, corpus ſtatim ac in centrum peruenerit, ibi euanescet, neque vltra centrum progredietur, neque reuertetur. Vtrum vis enim eueniat, curua, quam corpus velocitate quadam proiectum deſcriberet, haberet duas abſides, quod eſſet abſurdum (756). Quoties autem vis centripeta in minore quam triplicata ratione decrescit, vt in ſimplici diſtantiarum ratione vel ea maiore, corpus, poſtquam in centrum per-

uenerit, in eadem recta, qua ad centrum acceſſit, recedet; perſpicitur hoc enim ex ratione reciproca duplicata (655), et ſimplici de qua patet (266) corpus non vltra centrum posſe progredi. At ſi $n+1>0$ corpus recta ad centrum descendens finitam habebit celeritatem, qua vltra centrum in eadem recta progredietur, quoad motum amiſerit (273). Hoc ergo modo ſatisfecimus deſiderato ſuperiori (272), quo motum corporis recta descendentis, cum in centrum perueniſſet, definiri oportebat.

PROPOSITIO 92.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 2. 763. *Inuenire vires centripetas tendentes ad duo virium centra* C *et* D, *quae faciant, vt corpus in data curua* AMB *et data in ſingulis punctis* M *celeritate moueatur.*

Solutio.

Moueatur corpus ab A per M ad B, et ſit eius celeritas in M debita altitudini v, ponatur $CM=y$ et $DM=z$. Ducta vero tangente TV in eamque ex C et D demiſſis perpendiculis CT et DV, dicantur $CT=p$ et $DV=q$. Vis centripeta porro, quae ad C tendit ſit $=P$, et ea, quae ad D trahit ſit $=Q$. Vis igitur normalis ex vtraque orta erit $=\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}$, et vis tangentialis accelerans motum corporis erit $=-\frac{P\surd(y^2-p^2)}{y}-\frac{Q\surd(z^2-q^2)}{z}$ cadentibus tangentibus in antecedentia. Poſito ergo radio osculi in $M=r$, et

et elemento curuae $=ds$ erit $\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}=\frac{2v}{r}$ (561); et $dv=-\frac{Pds\surd(y^2-p^2)}{y}-\frac{Qds\surd(z^2-q^2)}{z}$ (559). Eſt vero $ds=\frac{ydy}{\surd(y^2-p^2)}=\frac{zdz}{\surd(z^2-q^2)}$, ideoque $dv=-Pdy-Qdz$. Ex his duabus aequationibus coniunctis habebitur $P=\frac{2vyzdz+qrydv}{przdz-qrydy}$ et $Q=\frac{2vzydy+przdv}{qrydy-przdz}=-\frac{2vzydy-przdv}{przdz-qrydy}$. Eſt vero $r=\frac{ydy}{dp}=\frac{zdz}{dq}$; ergo $zdz=\frac{ydy\surd(z^2-q^2)}{\surd(y^2-p^2)}$ atque $dq=\frac{dp\surd(z^2-q^2)}{\surd(y^2-p^2)}$. Tandem dicta $CD=k$ erit $k^2=y^2+z^2-2pq-2\surd(y^2-p^2)(z^2-q^2)$, ex quibus P et Q prout libuerit determinari poſſunt. Q. E. I.

Corollarium 1.

764. Si corpus in curua motu aequabili debeat moueri ita vt ſit $v=c$, et $dv=0$; erit $P=\frac{2cyzdz}{przdz-qrydy}$ et $Q=-\frac{2czydy}{przdz-qrydy}$. Atque $P:Q=dz:-dy$.

Corollarium 2.

865. Si fuerit $v=\frac{cb^2}{p^2}$, ſeu celeritas corporis reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem demiſſum; erit $dv=-\frac{2cb^2dp}{p^3}$. His ſubſtitutis fit $Q=0$, erit enim $przdv=-\frac{2cb^2rzdp}{pp}=-\frac{2cb^2zydy}{pp}=-2vzydy$. Atque $P=\frac{2cb^2pyzdz-2cb^2qy^2dy}{p^3r(pzdz-qydy)}=\frac{2cb^2y}{p^3r}$ (714). Haec enim vis ſola efficiet, vt corpus hoc modo in iſta curua moueatur.

Exemplum.

766. Sit curua data AMB ellipſis et centra C et D eius foci. Ponatur eius axis transuerſus $AB=A$ et latus rectum $=L$, eritque ex natura el-

lipſis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$ et $4qq = \frac{ALz}{A-z}$. At praeterea erit $z = A - y$, et $r = \frac{4(Ay-yy)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}} = \frac{4(Az-zz)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}}$. Ex quo prodibit $P = \frac{Avdy - ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$ et $Q = \frac{Avdz - zdv(A-z)}{2zdz(A-z)}$ $= \frac{Avdy + ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$, ideoque $P + Q = \frac{Av}{yz}$ et $Q - P = \frac{dv}{dy}$.

PROPOSITIO 93.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 3. 767. *Moueatur corpus data celeritate in curua etiam data* AMB, *et oportet inueniri vim centripetam ad centrum* C *tendentem vna cum vi perpetuo ad rectam* AB *normaliter in directione* MP *corpus trahente, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac curua cum praeſcriptaque celeritate libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in puncto M exiſtentis celeritas debita altitudini v, et diſtantia $MC = y$, perpendicularis vero $MP = z$. Ponatur vis corpus ad centrum C trahens $= P$ et vis ſecundum MP trahens $= Q$. Ducta tangente MV in M demittantur in eam perpendicula CT et PQ, quae dicantur p et q. His factis erit vis normalis ex vtraque orta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$ et vis tangentialis $= \frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y} + \frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$. Poſito ergo radio osculi in $M = r$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561) et $dv = -Pdy - Qdz$ (559). Ex his itaque reperietur $P = \frac{2vyzdz + qrydv}{przdz - qrydy}$ et $Q = -\frac{2vzydy - przdv}{przdz - qrydy}$. Ponatur autem $CP = x$, erit $\sqrt{(dx^2 + dz^2)} : dx = z : q$; vnde

$q =$

$q = \frac{zdx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ et poſito dx conſtante eſt $r = \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddz}$. Erit autem porro $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$, et $p = \frac{zdx-xdz}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$. His ſubſtitutis prodibit $P = \frac{2vydxdzddz - ydxdv(dx^2+dz^2)}{x(dx^2+dz^2)^2}$, et $Q = -\frac{2vydydxddz+(zdx-xdz)(dx^2+dz^2)dv}{x(dx^2+dz^2)^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

768. Si corpus aequabiliter in curua moueri debeat ita vt ſit $v = c$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2cydxdzddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$ et $Q = -\frac{2cydydxddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$.

Corollarium 2.

769. Si curua ſit circulus, cuius centrum in C exiſtat, et radius dicatur $= a$. Erit $r = a$, $y = a$ $p = a$, et $q = \frac{z^2}{a}$. . Quare prodibit $P = \frac{2v}{a} + \frac{zdv}{adz}$ et $Q = -\frac{dv}{dz}$. Ergo cognita Q erit $P = \frac{2v}{a} - \frac{Qz}{a}$. Atque ſi eſt $v = c$ et $dv = o$, erit $Q = o$, et $P = \frac{2c}{a}$.

Scholion.

770. Ex hac propoſitione in ſe ſpectata, qua ipſa curua a corpore deſcripta datur, parum vtilitatis conſequitur ad curuas, quas corpora a compoſitis viribus ſollicitata deſcribunt, determinandas. Ab hac vero ad alias propoſitiones progredi licet, in quibus curuae a corporibus deſcriptae non ipſae dantur; ſed generantur ex motu vnius pluriumue datarum, quemadmodum in ſuperioribrs propoſitionibus, in quibus de motu abſidum tractauimus, eſt factum.

PRO-

PROPOSITIO 94.
Problema.

Tab. VIII. Fig. 4. 771. *Si moueatur corpus vtcunque in curua* AMB *ipſa vero curua interea reuoluatur circa punctum fixum* C: *inueniri oportet duas vires, quarum altera perpetuo ad punctum fixum* C, *altera normaliter ad rectam poſitione datam* PC *ſit directa, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac orbita mobili libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in M exiſtentis celeritas, qua in ipſa curua elementum Mm percurrit, debita altitudini v, atque celeritas angularis corporis in orbita ad veram celeritatem angularem corporis circa C vt 1 ad w, ſeu celeritas angularis corporis in orbita ad celeritatem angularem ipſius orbitae, dum corpus eſt in M vt 1 ad $w-1$. Ponatur radius $CM=y$, et perpendiculum CT, ex C in tangentem orbitae in M demiſſum $=p$, ipſa vero tangens $MT=q$, ita vt ſit $q=\surd(y^2-p^2)$. Ex M in rectam poſitione datam DP demittatur perpendiculum MP, quod dicatur z, et CP, x, ita vt ſit $x=\surd(y^2-z^2)$. Iam dum corpus elementum Mm percurrit, ponatur orbita interea angulo $=mC\mu$ circumferri; quamobrem motu compoſito corpus in μ perueniet, ſumto $C\mu=Cm$, eritque $M\mu$ elementum verae curuae, in qua corpus mouetur, in quod productum demittatur ex C perpendiculum $C\Theta$. Centro C deſcribatur ar-

arculus $M n \nu$, erit $mn = \mu\nu = dy$, et $Mn : M\nu = 1 : w$. Eſt vero $Mm = \frac{ydy}{q}$, vnde $M\nu = \frac{wpdy}{q}$, ex quo habebitur $M\mu = \frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2+q^2)}$, atque porro $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $M\Theta = \frac{qy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Fiat $Mm : M\mu = \sqrt{v} : \frac{\sqrt{v(w^2p^2+q^2)}}{y}$, cuius quadratum $\frac{v(w^2p^2+q^2)}{y^2}$ exhibet altitudinem debitam verae corporis celeritati; huius igitur incrementum eſt $= \frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} + \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Radius osculi autem verae curuae, in qua corpus incedit eſt

$$= \frac{ydy}{d.C\Theta} = \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+py^3dw-p^3ydw}$$

$$= \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+pq^2ydw}.$$

Poſito ſinu toto $=1$, erit ſinus anguli $CMP = \frac{x}{y}$ et coſinus $= \frac{z}{y}$. At anguli $CM\Theta$ ſinus erit $= \frac{wp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ eiusque coſinus $= \frac{q}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Ex quibus reperitur anguli $PM\Theta$ ſinus $= \frac{wpz-qx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, eiusque coſinus $= \frac{wpx+qz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Demiſſo ex P in tangentem $M\Theta$ perpendiculo PQ erit $PQ = \frac{wpz^2-qxz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $MQ = \frac{wpxz+qz^2}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Atque percurrente corpore elementum $M\mu$ erit lineae PM incrementum $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$. Ex qua aequatione relatio inter w et x innoteſcit, et ſimul poſitio lineae abſidum AB reſpectu rectae CP inueniri poteſt. Iam ponatur vis corpus ſollicitans verſus $MC = P$ et vis ſecundum MP trahens $= Q$, ex quibus oritur vis tangentialis

 mo-

motum corporis retardans $= \frac{Pq}{\surd(w^2p^2+q^2)} + \frac{Qwpx+Qqz}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$ quae ergo ducta in $\frac{dy}{q}\surd(w^2p^2+q^2)$ aequalis poni debet $= -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$, ita vt prodeat $Pdy + \frac{Qwpxdy}{qy} + \frac{Qzdy}{y} = -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Vis autem normalis ex vtraque orta eſt $\frac{Pwp}{\surd(w^2p^2+q^2)} + \frac{Qwpz-Qqx}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$, quae aequalis eſſe debet $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy+2wvy^3dp+2vpq^2ydw}{y^3dy\surd(w^2p^2+q^2)}$ (561), quare habebitur $Pwpydy + Qwpzdy - Qqxdy = \frac{2w(w^2-1)vp^3dy}{y^2} + 2wvydp + \frac{2vpq^2dw}{y}$. Ex quibus aequationibus coniunctis obtinetur $Q = -\frac{wpqdv}{yxdy} - \frac{2wvqdp}{yxdy} - \frac{2vpqdw}{yxdy}$, atque $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy} + \frac{2vpqzdw}{y^2xdy}$. Angulus vero, quem linea abſidum AB facit cum recta CP erit $= \int\frac{(w-1)pdy}{qy}$, vnde eius poſitio quouis tempore innotescit. Q.E.I.

Corollarium I.

772. Quia eſt $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$ ponatur $z = ty$; eritque $\frac{dt}{\surd(1-tt)} = \frac{wpdy}{qy}$. Ex qua aequatione, ſi detur w in y, in qua etiam ob curuam AMB datam p et q exprimuntur, inuenietur t, ideoque etiam z et x.

Corollarium 2.

773. Si fuerit celeritas corporis in orbita $\surd v$ reciproce vt perpendiculum CT ex C in tangentem demiſſum, ſeu $v = \frac{a^2c}{p^2}$ erit $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy}$ et $Q = -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy}$.

Co-

Corollarium 3.

774. Si hoc caſu eſt w conſtans, euaneſcit vis Q et ſola remanet $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ ad centrum tendens, quae efficiet, vt corpus in orbita AMB circa C mobili progrediatur prorſus vt ſupra inuentum eſt (734).

Corollarium 4.

775. Si v non eſt $= \frac{a^2c}{p^2}$, ſed w conſtans, ita vt motus angularis orbitae proportionalis ſit motui angulari corporis in orbita, nempe vt $w-1$ ad 1, erit $Q = -\frac{wpqdv - 2wvqdp}{yxdy}$ et $P = \frac{qdv(wpz - qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz + px)}{y^2xdy}$.

Exemplum.

776. Poſito $v = \frac{a^2c}{p^2}$, ſit curua AMB ellipſis alterutrum focum in C habens. Cuius igitur axis transuerſus ſi vocetur A et latus rectum L erit $4pp = \frac{ALy}{A-y}$, ſeu $p = \frac{\sqrt{ALy}}{2\sqrt{(A-y)}}$ et $q = \frac{\sqrt{(4Ay^2 - 4y^3 - ALy)}}{2\sqrt{(A-y)}}$, atque $\frac{dp}{p^3} = \frac{2dy}{Ly^2}$. Quare habebitur $Q = -\frac{2a^2cdw\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}{yxdy\sqrt{AL}}$ et $P = \frac{4a^2c}{Ly^2} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ $\frac{2a^2czdw\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}{y^2xdy\sqrt{AL}}$. Atque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wdy\sqrt{AL}}{y\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}$.

Scholion 1.

777. Hae formulae exiſtente curua ellipſi variis modis ſimpliciores effici poſſunt, ſi curua in qua corpus mouetur ad circulum proxime accedat. Atque hic caſus tum non parum habebit vtilitatis in motu lunae theoretice definiendo. Terra enim vt

in C quieſcens ponatur, et Sol in recta ad CP in C perpendiculari pariter tanquam quieſcens conſideretur, quo facto et his viribus cum viribus ſolis et terrae comparatis, elicietur motus Lunae ſynodicus pro quauis lineae abſidum poſitione, et ſimul ipſius lineae abſidum motus, qui a vero lunae motu quam minime differet.

Scholion 2.

778. Multo latius quidem patet iſta propoſitio, quam ſuperior (729), in qua vis omnis ad centrum rotationis orbitae erat directa, haec enim illam in ſe complectitur, euaneſcente vi Q. Neque tamen perfecte ad motum lunae explicandum quadrat propter vim reciproce cubo diſtantiae MC proportionalem in vi P (773). Hanc ob rem alios orbitae motus praeter gyratorium in medium proferemus, qui et latius pateant, et magis cum quaeſtionibus phyſicis congruant. Huiusmodi ſunt motus orbitarum per quasque curuas manente orbita ſibi ſemper parallela, quae contemplatio aliis ideo anteferri meretur, quod vires ſollicitantes et facile inueniri, et ſimplicioribus formulis poſſint comprehendi. Ad hoc autem praeſtandum opus eſt ſequens theorema praemitti.

PROPOSITIO 95.

Theorema.

Tabula IX. Fig. 1. 779. *Moueatur corpus* M *in curua* AM *a vi quacunque ſollicitatum circa punctum* C, *atque inſuper et*

et corpus M *et punctum* C *ab aequali vi et in eadem directione ſollicitentur: erit motus relatiuus corporis* M *reſpectu puncti* C, *ſeu motus corporis* M *qualis ex* C *ſpectatur idem, ac ſi haec noua vis non acceſſiſſet.*

Demonſtratio.

Puncto C quieſcente perueniat puncto temporis dt corpus ex M in m. Hoc igitur tempuſculo finito corpus M diſtabit a C interuallo mC, et cum plaga quadam fixa recta AC expreſſa conſtituet angulum mCA. Ponatur iam corpore exiſtente in M et corpus M et punctum C ab aequali et in eandem plagam tendente vi vrgeri, ita vt punctum C ab hac vi tempuſculo dt promoueatur per Cc. Eodem igitur tempuſculo dt corpus M, ſi quieſceret, ab hac vi transferretur per Mm parallelam et aequalem ipſi Cc. At quia corpus C iam habet motum inſitum, quo tempuſculo dt elementum Mm percurrit, vtroque motu coniuncto deſcribet diagonalem Mμ completo parallelogrammo M$m\mu n$. Quocirca accedente hac noua vi corpus M finito tempuſculo dt diſtabit a puncto C, quod interea in c eſt translatum, interuallo μc, et ducta ac parallela ipſi AC cum plaga fixa conſtituet angulum $\mu c\alpha$. At eſt ob mC$c\mu$ parallelogrammum $\mu c = m$C et ang. mCA $=$ ang. $\mu c\alpha$. Conſequenter vis vtrumque punctum M et C aequaliter et ſecundum eandem directionem ſollicitans non immutat motum relatiuum corporis M reſpectu puncti C. Q. E. D.

Corollarium 1.

780. Quaecunque igitur vis punctum C ſollicitat, ſi eadem ſimul corpus *M* ſecundum eandem plagam vrgeat; motus relatiuus corporis *M* reſpectu puncti C non mutabitur.

Corollarium 2.

781. Huiusmodi ergo vi *M* et C aequaliter ſollicitante effici poteſt, vt corpus *M* in orbita A*M* quomodocunque mobili moueatur. Orbita autem ipſa motu ſuo ita ſequetur puncti C motum, vt eius poſitio ſibi ſemper maneat parallela.

Corollarium 3.

782. Perſpicitur etiam ex demonſtratione propoſitionis, ſi et puncto C et corpori *M* aequalis celeritas imprimatur ſecundum eandem plagam, motum relatiuum non perturbatum iri.

Corollarium 4.

783. Atque cum talis motus puncto C impreſſus perpetuo duret aequabilis in directum ſine vlla vis continuatione, ſequitur corpus *M* circa punctum C aequabiliter indirectum progrediens aeque moueri poſſe, ac circa quiescens. Hoc enim obtinebitur, ſi modo corpori *M* aequalis celeritas in eandem plagam directa adiiciatur.

Corollarium 5.

784. Corpus ergo circa centrum virium vniformiter in directum progrediens, eandem curuam li-

libere deſcribere poterit, quam circa quieſcens deſcriberet, modo ei ſuperaddatur tanta celeritas quantam accepit centrum virium.

Corollarium 6.

785. Quemadmodum autem corpus ſibi ipſum relictum non poteſt in linea curua progredi, neque inaequabiliter in recta; ita corpus circa centrum virium vel in curua motum vel difformiter in directum non poteſt libere circa id eandem curuam deſcribere quam circa quieſcens, ſed perpetuo tanta vi inſuper vrgeri debet, quanta ad centrum in ſua via retinendum requiritur.

PROPOSITIO 96.

Problema.

786. *Si corpus* M *circa centrum virium* L *quieſcens reuoluatur in curua* BM; *determinare vim, quae efficit, vt corpus in eadem orbita ſecundum curuam* AL *ſibi ipſi ſemper parallele mota ingrediatur.* Tabula IX. Fig. 2.

Solutio.

Quia corpus M in orbita BM libere mouetur circa centrum virium quieſcens L, erit, poſita diſtantia LM $= y$ et perpendiculo ex L in tangentem in M demiſſo $= p$, altitudo debita celeritati in M $= \frac{a^2c}{p^2}$ (589) et vis centripeta ad L tendens $= \frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ (592). Iam ponatur centrum L in curua AL moueri attractum ad centrum virium C, ſitque CL $= s$ et perpendiculum ex C in tangentem in L de-

demiſſum $= w$. Quo poſito erit altitudo debita celeritati in $L = \frac{b^2 e}{w^2}$ (589) et vis punctum L ad C trahens $= \frac{2b^2 edw}{w^3 ds}$ (592). Ponatur autem primo puncto L celeritas ſecundum tangentem imprimi $= \frac{b\sqrt{e}}{w}$, eademque etiam corpori *M* ſecundum directionem huic tangenti parallelam; atque perſpicuum erit ſi nulla inſuper vis punctum L ſollicitet, ſed tantum hunc motum impreſſum conſeruet, corpus *M* libere in eadem curua B*M* motum puncti L ita ſequente, vt axis BL ſibi ſemper maneat parallelus, motum iri (783). At quo corpus *M* eodem modo circa punctum L in curua AL incedens moueatur, oportet, vt ipſi perpetuo tanta vis imprimatur, quanta requiritur ad punctum L in hac curua AL retinendum (781). Ducta igitur *M*N parallela ipſi LC, corpus *M* praeter vim, quae ad L vrgetur, ſollicitari debebit vi $= \frac{2b^2 edw}{w^3 ds}$ ſecundum directionem *M*N. Quare haec duplex vis efficiet vt problemati ſatisfiat. Quo autem appareat, quanam vi corpus *M* reſpectu puncti C et rectae fixae AC ipſi BL parallelae ſollicitari oporteat, reſoluantur vires corpus *M* ſecundum *M*N et *M*L trahentes in duas alias, quarum altera habeat directionem *M*C altera *M*P, quae linea *M*P ad AC perpendiculariter eſt ducta. Ad hoc praeſtandum ipſi *M*P ducatur parallela KLN rectam *M*C in O ſecans, et vocetur LI $= x$, *M*I $= z$; CK $= r$, KL $= t$; atque CP $=$ X, P*M* $=$ C et C*M* $=$ Y. Quocirca erit $y = \sqrt{(x^2 + z^2)}$; $s = \sqrt{(r^2 + t^2)}$ et $Y = \sqrt{(X^2 + Z^2)}$. Atque poro $p = \frac{xdz - zdx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ et

$w =$

$w = \frac{rdt - tdr}{\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}$. Praeterea vero erit $X = r + x$ et $Z = t + z$. Quare cum ob curuas AL et BM datas, z, y et p in x, itemque t, s et w in r dentur, poterunt hae omnes quantitates in X, Z et Y exhiberi. Aequatio vero inter X et Z ex eo deducetur, quod temporis incrementum per BM aequale eſſe debeat temporis incremento per AL. Hinc ergo erit $\frac{p\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{a\sqrt{c}} = \frac{w\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}{b\sqrt{e}}$ et integralibus ſumtis erit area ACL + conſtante quadem area ad aream BLM vt $b\sqrt{e}$ ad $a\sqrt{c}$. Vis igitur ſecundum ML trahens reſoluatur in binas ſecundum MO et LO ſeu MI trahentes, et ſimili modo vis ſecundum MN in binas ſecundum MO et NO trahentes, quarum poſterior corpus M ſecundum directionem ipſi MI contrariam ſollicitabit; ad quas reſolutiones inſtituendas angulos noſſe oportet. Eſt vero MLO = LMI, eiusque igitur ſinus $= \frac{x}{y}$ et coſinus $= \frac{z}{y}$, ſumto 1 pro ſinu toto. Similiter eſt MON = CMP, huius igitur ſinus $= \frac{X}{Y}$ et coſinus $= \frac{Z}{Y}$. Anguli ergo LMO, qui horum eſt differentia ſinus erit $= \frac{Xz - Zx}{Yy}$. Denique eſt MNQ = CLK, quare eius ſinus eſt $\frac{r}{s}$ et coſinus $= \frac{t}{s}$. Conſequenter ob NMO = MNQ − MON, erit eius ſinus $= \frac{Zr - Xt}{Ys}$. Eſt vero $Xz - Zx = Cr - Xt$ ob $V = r + x$ et $Z = t + z$. Ex his fiet MN : MO ſeu $\frac{X}{Y} : \frac{r}{s}$ ita vis ſecundum MN tendens $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim ſecundum MC, quae ergo erit $= \frac{2b^2eYrdw}{Xsw^3ds}$. Atque MN : NO ſeu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr - Xt}{Ys}$ ita vis ſecundum MN $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim ſe-

ſecundum ON quae ergo eſt $= \frac{2b^2edw(Zr-Xt)}{Xsw^3ds}$. Simili modo erit ML : MO $= \frac{X}{Y} : \frac{x}{y}$ ita vis ſecundum ML, $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim ſecundum MC quae ergo erit $= \frac{2a^2cYxdp}{Xyp^3dy}$. Atque ML:LO ſeu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr-Xt}{Yy}$ ita vis ſecundum ML $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim ſecundum OL ſeu MP quae ergo eſt $= \frac{2a^2cdp(Zr-Xt)}{Xyp^3dy}$. Ex quibus colligitur corpus M trahi debere a vi tendente ſecundum MC $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right)$ atque a vi ſecundum MP $= \frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$. Quae expreſſiones omnes in X, Z et Y exhiberi poterunt, et praeterea inter has quantitates, quae veram curuam a corpore M deſcriptam pertinent, aequatio aſſignari. Q. E. I.

Corollarium 1.

787. Si curua AL ſit peripheria circuli, cuius centrum in C et radius AC$=b$, erit $s=w=b$, et $r^2+t^2=b^2$. Hoc ergo caſu vis ſecundum MC trahens erit $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2} - \frac{a^2cdp}{yp^3dy}\right)$ et vis ſecundum MP$= \frac{(Zr-X\sqrt{(b^2-r^2)})}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2e}{b^2}\right)$. Atque e erit altitudo debita celeritati quam habet punctum L.

Corollarium 2.

788. Sit curua BM ellipſis centrum habens in L, et BL eius ſemiaxis transuerſus $=a$, ita vt altitudo debita celeritati in B ſit $=c$, alter vero ſemi axis ſit $=b$. Eritque $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$ et $\frac{2a^2cdp}{p^3dy} = \frac{2cy}{b^2}$. Quare vis ſecundum MC fit

=

$=\frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds}+\frac{2cx}{b^2}\right)=\frac{2b^2eYdw}{sw^3ds}-\frac{2Yx}{X}\left(\frac{b^2edw}{sw^3ds}-\frac{c}{b^2}\right)$. Atque vis ſecundum $MP=\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2}-\frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$.

Corollarium 3.

789. Si et curua AL fuerit circulus vt coroll. 1. et curua BM ellipſis vt coll. 2. erit vis ſecundum $MC=\frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2}+\frac{2cx}{b^2}\right)=\frac{2eY}{b^2}-\frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2}-\frac{c}{b^2}\right)$ et vis ſedum $MP=\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2}-\frac{2e}{b^2}\right)$, vbi r et t et x in X, Z et Y poterunt determinari ex his aequationibus $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$, $r^2+t^2=b^2$, $r+x=X$ et $t+z=Z$. Aequatio autem emergens ad quatuor dimenſiones aſcendit.

Corollarium 4.

790. Si ellipſis BM ponatur infinite parua ſeu ſaltem perquam exigua reſpectu circuli AL ita tamen vt tempus periodicum ellipſis ſit finite magnum, erit $x=\frac{a^2X(Y^2-b^2)\pm abZ\surd(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$ et $z=\frac{b^2Z(Y^2-b^2)\mp abX\surd(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$.

Corollarium 5.

791. Si curua BM fuerit quoque circulus in L centrum habens; fiet $b=a$, ideoque $x^2+z^2=a^2$, $r^2+t^2=b^2$, $r=X-x$ et $t=Z-z$, ex quibus poſito $b^2-a^2=f^2$ reperietur $2x=\frac{(Y^2-f^2)X\pm Z\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}{Y^2}$ et $2z=\frac{(Y^2-f^2)Z\mp X\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}{Y^2}$. Atque $2Zr-2Xt=-\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)$.

 Scho-

Scholion 1.

792. Extremum hoc corollarium adiecimus, vt appareat, quales vires requirantur ad corpus in epicyclo circa centrum virium circumagendum, quemadmodum Ptolemaici planetas moueri exiſtimauerunt.

Corollarium 6.

793. Ex hypotheſi coroll. 3. intelligitur ſi fuerit $\frac{e}{b^2}=\frac{c}{b^2}$ ſeu celeritas corporis L ad celeritatem corporis *M* in B vt diameter circuli AL ad axem coniugatum ellipſis B*M*; tum veram curuam a corpore *M* deſcriptam fore ellipſin centrum habentem in C, cum vis ſollicitans ad C tendens ſit $=\frac{2eY}{b^2}$, euanescente vi ſecundum *M*P. Huius ellipſis ſemiaxis maior erit $b+a$, minor vero $b+h$.

Scholion 2.

794. Propoſitionem hanc ideo praecipue attuli, quod in appendice nouae Principiorum *Neutoni* editionis anglicae Cl. *Machin* aſſeuerat, lunae motum conſiderari poſſe tanquam in ellipſi cuius axis transuerſus ſit ad coniugatum vt 2 : 1 circa centrum factum, dum interea ipſa ellipſis motu ſibi ſemper parallelo ſecundum peripheriam circuli libere progrediatur, quemadmodum in coroll. 3. explicui. Equidem non nego hac ratione motum perquam conformem motui lunae poſſe exhiberi, ſed an exacte congruat vehementer dubito. Sequente autem propoſitione determinare ſtatui, quid

ad

ad lunae motum indicandum requiratur. Etiamſi vero iſta propoſitio ad aſtronomiam pertineat, tamen eam, vt genuina huiusmodi quaeſtiones reſoluendi methodus perſpiciatur, hic afferre e re viſum eſt.

PROPOSITIO 97.

Problema.

795. *Quieſcente ſole in* S, *et terra* T *circa eum in circulo* TD *vniformiter mota, attrahatur luna* L *tum ad terram* T *tum ad ſolem* S *in ratione reciproca diſtantiarum duplicata; quibus poſitis determinari oporteat motum lunae, qualis ex terra* T *ſpectatur.* Tabula IX. Fig. 3.

Solutio.

Ponatur diſtantia terrae a ſole $ST = a$, et vis qua terra ad ſolem trahitur $= \frac{f}{a^2}$. Diſtantia lunae a terra LT ſit $= y$, et diſtantia lunae a ſole LS ſit $= z$. Vis qua luna ad terram trahitur ſit $= \frac{b}{y^2}$; vis vero qua luna ad ſolem trahitur ſecundum LS erit $= \frac{f}{z^2}$. Ab his igitur viribus lunam ſollicitantibus, qualis motus producatur, eſt inueſtigandum. At quia lunae motus, qualis a ſpectatore in terra conſtituto obſeruatur, definiri debet, terra tanquam quieſcens eſt conſideranda; id quod fit, dum toti ſyſtemati motus ei, quem terra habet, aequalis et contrarius imprimitur, ſimulque ſollicitationes, quas terra a ſole recipit, contrario modo in lunam et ſo-

lem cogitatione transferuntur. Celeritas autem terrae in circulo TB debita eſt altitudini $\frac{f}{2a}$, vti ex vi $\frac{f}{a^2}$, qua terra ad ſolem vrgetur colligi poteſt. Tanta igitur celeritas et ſoli et lunae ſecundum directionem ad TS normalem imprimi debet. Praeterea, quia terra ad ſolem trahitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet ad huius vis effectum deſtruendum res ita concipi, ac ſi ſol perpetuo tanta vi ad terram traheretur, luna vero eadem vi ſecundum LN ipſi ST parallelam. Hoc facto ſol deſcribet circa terram in T quieſcentem circulum SE eadem celeritate, qua ante terra circa ſolem ferebatur. Luna vero praeter vires ſecundum LT et LS tendentes inſuper vrgebitur verſus LN vi $=\frac{f}{a^2}$. Ducta LM parallela quoque ipſi TS, reſoluatnr vis ſecundum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in has duas, quarum alterius directio ſit LT, alterius LM. Ex conſideratione ergo trianguli LTS orietur vis ſecundum LT agens $=\frac{fy}{z^3}$ et vis ſecundum LM trahens $=\frac{af}{z^3}$. Quare omnibus coniunctis luna trahetur verſus LT vi $=\frac{h}{y^2}+\frac{fy}{z^3}$, atque verſus LM vi $=\frac{f}{a^2}-\frac{af}{z^3}=\frac{f(z^3-a^3)}{a^2z^3}$, ex quibus viribus motus lunae debet determinari. Notandum autem directionem LM non eſſe conſtantem ſed variabilem, quippe perpetuo parallelam radio TS, qui ob motum ſolis ſecundum peripheriam SE circumfertur. Producta igitur ST in A, vt AB ſit linea ſyzygiarum, et ex L in eam demiſſo perpendiculo LP erit TP aequalis et parallela ipſi LM. Perueniat tempuſculo dt luna

ex

ex L in l, ſol autem ex S in s; transferetur ergo interea linea ſyzygiarum in ab, et luna in l ſollicitabitur partim a vi ſecundum lT, partim a vi ſecundum parallelam ipſi Tp trahente, demiſſo ſcilicet ex l in Ta perpendiculo lp. Ex his autem viribus reſoluendis reperiuntur vis normalis et tangentialis, quarum vtraque celeritatem lunae dabit. Hae autem aequationes coniunctae eliminata celeritate praebebunt aequationem pro curua ABL in qua luna moueri cernitur. Q. E. I.

Scholion I.

796. Aequationes, quae hinc ad motum lunae deducuntur, tam fiunt complexae, vt ex iis neque celeritas lunae, neque orbita, neque poſitio lineae abſidum eiusque motus exacte poſſint determinari. Vero autem proxime ex eodem calculo negligendis quantitatibus vehementer exiguis quodammodo concluſiones in uſum aſtronomiae poſſunt elici, quemadmodum fecit Summus *Neutonus* in Phil. Princ. Libr. III. Etiamſi autem hoc incommodo calculus non laboraret, tamen iſta propoſitio non ſummo rigore motum lunae eſſet exhibitura. Poſuimus enim ſolem prorſus quiescere, quod a vero parumper discrepat; deinde terram in circulo motam conſideramus, et orbitam lunae in ipſo terrae plano poſitam, quae itidem re ipſa ſecus ſe habent. Interim tamen certum eſt, ſi huius propoſitionis ſolutio poſſet euolui ex eaque tabula confici, hoc

hoc in Aſtronomia maximam habiturum eſſe vtilitatem.

Corollarium 1.

797. Quia lunae a terra diſtantia eſt admodum parua reſpectu diſtantiae terrae a ſole, ſine ſenſibili errore fere poterit poni $z = a$, quo caſu vis ſecundum LM agens euaneſcit, et luna tantum ad terram trahetur vi $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$.

Corollarium 2.

798. Cum orbita lunae non multum differat a circulo, poterit ea inſtar ellipſis mobilis conſiderari, vt fecimus prop. 90 (747). Quare ad motum abſidum cognoscendum, erit ex illius prop. coroll. 3 (750) $P = \frac{a^3by + fy^4}{a^3}$, atque luna a perigaeo ad apogaeum perueniet abſoluto motu angulari circa terram angulo $= 180\sqrt{\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}}$ grad. vbi y, quia non multum variatur tanquam conſtans eſt conſiderandum.

Scholion 2.

799. Regrederetur ergo perpetuo linea abſidum motus lunaris, quia $\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}$ minor et vnitate, id quod eſt contra obſeruationes. Ratio vero huius erroris eſt quod z vt conſtantem quantitatem conſiderauimus. Nam etſi z non multum neque augeatur neque minuatur ratione ſui ipſius, tamen eius incrementa et decrementa reſpectu incrementorum pſius y minime negligi poſſunt. Quare cum ipſius

P dif-

P differentiale ſit accipiendum, in eo perperam z tanquam conſtantem ſumus contemplati, eiusque loco a poſuimus. Quia autem z non poteſt dari per y, motus abſidum non poteſt hoc modo determinari. Interim tamen hoc colligitur, ſi fuerit $ady > ydz$, lineam abſidum in antecedentia, at ſi $ady < ydz$ in conſequentia promoueri, ſi quidem cogitationem abſtrahamus a vi ſecundum LM agente.

Corollarium 3.

800. Poſito $LM = TP = x$, erit proxime $z = a + x$, vbi x eſt admodum paruum reſpectu a. Neglecto ergo x prae a erit vis qua luna ad terram trahitur $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$ et vis qua ſecundum LM trahitur $= \frac{3fx}{a^3}$. Haec igitur euaneſcit quando luna eſt in quadraturis, maxima vero eſt, quando luna eſt in ſyzygiis.

Scholion 3.

801. Cum autem non ſit huius loci haec ad motum lunae ſpectantia fuſius perſequi, quippe quae ad Aſtronomiam Theoreticam pertinent; ad reliqua inſtituto noſtro accommodata progrediemur. Sufficere enim poſſunt iſta ad intelligendum, quomodo canones motuum traditi, ad quosuis caſus motusque reſpectiuos inueniendos in vſum verti queant. Quae autem in hoc capite reſtant, motum corporum liberum, qui non fit in eodem plano, com-

plectuntur. Ex praecedentibus quidem manifeſtum eſt, vnica exiſtente vi centripeta, motum corporis ſemper fieri in eodem pluno, quomodocunque etiam corpus initio fuerit proiectum; et ſi plura ſint centra virium in eodem plano ſita, in eodemque plano corporis fiat proiectio, curua a corpore deſcripta ſimiliter tota in eodem plano erit poſita. Ad ſequentia igitur referri debet, quando corpus a pluribus viribus, quarum directiones in diuerſis planis exiſtunt, ſollicitatur, vel etiam quando directio, ſecundum quam corpus initio proiicitur, non in eo, in quo ſunt virium directiones, ſita eſt plano. His igitur in caſibus motus corporis ita debet conſiderari, quaſi fieret in ſuperficie quadam conuexa ſeu concaua, in eaque lineam quandam deſcriberet. Natura autem ſuperficiei exprimitur aequatione tres indeterminatas inuoluente, et lineae in ea ſuperficie ductae natura continetur eadem illa aequatione coniuncta cum alia aequatione vel tres quoque illas indeterminatas complectente vel duas tantum. Ex his enim deduci poterit curuae lineae proiectio in dato plano, et ex proiectione et ſuperficie ſimul innoteſcit ipſa curua a corpore deſcripta et in ſuperficie poſita. Quemadmodum porro in plano quaeuis vires ad duas normalem et tangentialem poſſunt reduci, ita in hoc negotio virium reductio ad tres vires fieri debet (545), quae, quales in corpus exerant effectus, primum ſumus inueſtigaturi.

PRO-

PROPOSITIO 98.

Theorema.

802. *Tres principales vires, quae faciunt, vt corpus in curua non in eodem plano exiſtente moueatur, et in quas aliae vires reſolui debent, ſingulae ſunt inter ſe normales: Earum vna eſt tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habet in dato plano, alterius vero directio eſt normalis ad hoc planum. Harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.*

Demonſtratio.

Aſſumto plano fixo APQ, in eoque axe AP, ſit M*m* elementum a corpore deſcriptum. Ex punctis M et *m* in planum fixum demittantur perpendicula MQ et *mq*, et ex punctis Q et *q* perpendicula in axem, QP, *qp*. Iam ſi corpus a nulla vi ſollicitaretur, in recta M*m* producta progrederetur celeritate quam habuit in M*m*; aequali ergo tempusculo, quo M*m* percurrit, perueniet in *n*, deſcripto elemento *mn* aequali et in directum poſito elemento M*m*. Quare demiſſo quoque ex *n* in planum APQ perpendiculo *nr*, erunt elementa Q*q* et *qr* inter ſe quoque aequalia et in directum poſita: hanc ob rem perpendiculum $r\pi$ ex *r* in axem AP demiſſum abſcindet elementum $p\pi = Pp$. Sit celeritas qua corpus elementum M*m* deſcribit, debita altitudini *v*, et conſideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta *mn* et tota in alteranda celeritate abſumitur. Ponatur haec vis tangentialis T Tabula IX. Fig. 4.

exiſtente vi grauitatis $=1$, erit $dv = T. Mm$, et elementum mn abſoluitur celeritate debita altitudini $v + dv$. Deinde in plano Mr concipiatur vis directionem habens ms normalem ad corporis directionem Mm. Haec ergo efficiet vt corpus ab mn declinet, et in $m\nu$ elemento in eodem plano Mr poſito progrediatur. Sit haec vis $= N$, et cum radius oſculi elementorum Mm et $m\nu$, demiſſo ex ν in mn perpendiculo $\nu\varepsilon$ ſit $= \frac{m\nu^2}{\nu\varepsilon}$, erit $\frac{2v.\nu\varepsilon}{m\nu^2} = N$ (561). Eſt vero $\frac{\nu\varepsilon}{m\nu}$ ſinus anguli $nm\nu$. Quamobrem erit $2v$. ſin. $nm\nu = N. m\nu = N. Mm$, ideoque ſin. $nm\nu = \frac{N.Mm}{2v}$. Tertia vis ſit normalis ad vtramque expoſitarum mn et ms, ita vt eius directio mt ſit normalis in planum Mr. Haec igitur vis neque praecedentium actiones impediet, neque ab ipſis impedimentum ſeu immutationem patietur. Tota ergo impendetur ad corpus a plano Mr detrahendum; deducat ea corpus ex ν in μ, ita vt planum $\nu m\mu$ ſit normale in planum Mr; eritque eius effectus angulus $\nu m\mu$. Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem vim normalem fecimus, modo aeſtimato, ſi fuerit haec vis M, erit ſin. $\nu m\mu = \frac{M.Mm}{2v}$. Tres ergo hae vires ſimul efficient, vt corpus, poſtquam elementum Mm deſcripſit, progrediatur in elemento $m\mu$, aucta celeritate debita ſcilicet altitudini $v + T. Mm$. Quaecunque autem aliae vires corpus ſollicitent, eae omnes reſolui poſſunt in huiusmodi tres, quarum directiones ſunt mn, ms, mt. Quarum effectus in corpus cum determinauerimus,

ſimul

ſimul quarumcunque virium effectus cognoſcentur. Q. E. D.

Corollarium 1.

803. Sumta $\nu\mu$ in plano $nr\pi$, et demiſſo ex μ in planum APQ perpendiculo $\mu\varrho$, erit $\mu\varrho$ parallela ipſi rn. Tres igitur coordinatae pro punctis M, m et μ erunt AP, PQ, QM; Ap, pq, qm; et Aπ, $\pi\varrho$, $\varrho\mu$.

Corollarium 2.

804. Quare ſi ex μ in $m\nu$ perpendiculum $\mu\eta$ demittatur, erit id in planum Mr normale; ſimilique modo $\varrho\theta$, quae eſt ad qr perpendicularis, in idem planum normalis erit. Quamobrem ob ϱ et μ in recta $\varrho\mu$ huic plano parallela poſita, erit $\varrho\theta = \mu\eta$, et $\theta\eta = \varrho\mu$.

Corollarium 3.

805. Si ad Qq ducatur normalis qT in plano fixo APQ, erit haec qT normalis in planum Mr. Cum igitur mt in idem planum ſit quoque normalis, erit mt parallela ipſi qT; inter hasque diſtantia erit altitudo mq.

Corollarium 4.

806. Trium coordinatarum dicantur AP $= x$, PQ $= y$ et QM $= z$. Eritque P$p = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $qm = z + dz$; atque $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz = \theta\eta$. At Q$q = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = qr$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2)} = q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$; ideoque $r\theta = \frac{-dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Porro erit

$\pi r = y + 2dy$ et $rn = z + 2dz$. Denique erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = mn$ et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2 + (dz + ddz)^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dz^2 + dz^2 + dz^2)}}$.

Corollarium 5.

807. Quia mq, $\theta\eta$ et $r\nu$ ſunt inter ſe parallelae, in eodem plano et rectis qr ac $m\nu$ terminatae, erit $\theta\eta - qm : q\theta = r\nu - mq : qr$. Eſt vero $\theta\eta - qm = dz + ddz$; $q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $qr = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quare eſt $r\nu - mq = \frac{(dz + ddz)(dx^2 + dy^2}{dx^2 + dy^2 + dyddy}$ hincque $n\nu = rn - r\nu = -ddz + \frac{dydzddy}{dx^2 + dy^2}$. Vnde reperitur ſin. $nm\nu = \frac{dydzddy - dx^2ddz - dy^2ddz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

Corollarium 6.

808. Cum deinde ſit $r\varrho = -ddy$, et $Qq : Pp = r\varrho : \varrho\theta$ erit $\theta\varrho = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \mu\eta$. Hanc ob rem habebitur ſin. $\nu m\mu = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$.

Corollarium 7.

809. Ex datis igitur tribus viribus T, N et M corpus ſollicitantibus orientur tres ſequentes aequationes: $dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $2vdydzddy - 2vddz(dz^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ atque $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ex quibus tum celeritas corporis in ſingulis locis tum ipſa curua cognoſcuntur.

Co-

Corollarium 8.

810. Duae poſteriores aequationes coniunctae et eliminata v dant iſtam aequationem $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}{M}$. Quae aſſumi poteſt pro aequatione naturam ſuperficiei exprimente, in qua curua deſcripta extat.

Scholion.

811. Hac igitur propoſitione primarias dedimus regulas, ex quibus motus corporis ita ſollicitati, vt in eodem plano moueri nequeat, deduci poterit. Oſtendimus enim omnes potentias in ternas, quarum effectus determinauimus, poſſe reſolui; et idcirco, quaecunque proponantur potentiae ſollicitantes ope talis reſolutionis, quem motum eae in corpore producant, cognoſcitur. Apparet etiam ſi potentia M deſit, corpus motum ſuum in plano eſſe abſoluturum, qui igitur caſus huc non pertinet. At ſi potentia tangentialis T euanescat manentibus reliquis M et N, corpus quidem orbitam non planam deſcribet, ſed tamen motu vniformi feretur. Quo igitur ſitus orbitae in vniuerſum cognoſcatur, inclinationem plani, in quo ſunt elementa Mm et $m\mu$, ad planum APQ eiusque cum hoc interſectionem inueſtigari oportebit.

PROPOSITIO 99.

Problema.

812. *Determinare plani, in quo duo elementa* Mm *et* mμ *a corpore deſcripta ſunt poſita, inclina-* Tabula X. Fig. 1.

na-

nationem ad planum fixum APQ, *eiusque cum hoc interſectionem.*

Solutio.

In plano, cuius inclinationem quaerimus, dantur tria puncta M, m et μ; in hoc igitur plano poſita erit quaeuis recta per horum punctorum duo tranſiens. Quare ſi recta mM producatur, donec ipſi qQ productae occurrat in S, erit punctum S tum in plano $Mm\mu$ tum in plano fixo APQ; tranſibit ergo per S recta, qua haec plana ſe mutuo interſecant. Manentibus igitur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, et elementis absciſſae Pp et $p\pi$ inter ſe aequalibus, erit $qm - QM : Qq = QM : QS$, hincqne $QS = \frac{z\surd(dx^2 + dy^2)}{dz}$. Lineae vero QS poſitio cognoscitur ex angulo PQS, cuius ſinus eſt $= \frac{dx}{\surd(dx^2 + dy^2)}$. Deinde in plano $Mm\mu$ quoque ſitum eſt punctum n; hanc ob rem recta per n et μ tranſiens ſeu huic parallela per M ducta in eodem extabit plano. Haec autem recta occurret plano APQ in puncto R rectae QP productae, et QR cognoscetur ex hac analogia $rn - \varrho\mu : r\varrho = \mu QM : QR$; hinc erit $QR = \frac{zddy}{ddz}$, ideoque $PR = \frac{zddy}{ddz} - y$. Eſt vero vt $Qq : Pp = QS : PT$ ducta ST perpendiculari in AP. Ex quo oritur $PT = \frac{zdx}{dz}$. Porro eſt quoque $Pp : pq - PQ = PT : PQ + ST$, ideoque $PQ + ST = \frac{zdy}{dz}$, et $ST = \frac{zdy}{dz} - y$. Occurrat recta RS producta axi AP in O; eritque $PR - ST : PT = PR : PO$, ex quo inuenitur $PO = \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$; atque AO

=

$= \frac{xdzddy - xdyddz + ydxddz - zdxddy}{dzddy - dyddz}$. Porro ex his eſt tangens anguli POR$= \frac{PR}{PO} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$; vnde poſitio interſectionis RO plani $Mm\mu$ cum plano fixo APQ innoteſcit. Inclinatio autem horum planorum mutua inuenitur demittendo ex Q in RS perpendiculo QV; tum enim erit anguli inclinationis tangens $= \frac{MQ}{QV}$. Eſt vero $QV = \frac{PO.QR}{RO} = \frac{zdxddy}{\surd(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}$ ideoque $\frac{MQ}{QV} = \frac{\surd(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}{dxddy}$, ex quo angulus inclinationis mutuae planorum $Mm\mu$ et APQ determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

813. Si angulus POR ſemper maneat idem, erit $\alpha dxddz + dyddz = dzddy$, eſtque huius anguli tangens $= \alpha$. Aequatio haec integrata dat $\alpha dx + dy + \beta dz = 0$, atque $\alpha x + y + \beta z = f$. Ex qua aequatione cognoſcitur orbitam a corpore deſcriptam totam fore in eodem plano poſitam.

Corollarium 2.

814. Si enim fuerit $\alpha x + y + \beta z = f$, erit $\alpha dx + dy + \beta dz = 0$, et $ddy + \beta ddz = 0$. Hinc fiet AO$= x + \frac{ydx + \beta zdx}{-dy - \beta dz}$, et cum ſit $-dy - \beta dz = \alpha dx$, erit AO $x + \frac{y}{\alpha} + \frac{\beta z}{\alpha} = \frac{f}{\alpha}$, ideoque et AO conſtans.

Corollarium 3.

815. Deinde manente angulo POR conſtante ſeu $\alpha x + y + \beta z = f$; erit tangens anguli inclinati-

onis planorum $Mm\mu$ et $APQ = \frac{\sqrt{(dx^2 + (-dy - \beta dz)^2)}}{-\beta dx} = \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{-\beta}$. Quare et iſte angulus erit conſtans.

Corollarium 4.

816. Neque etiam punctum interſectionis O inuariabile poni poteſt, niſi ſimul orbita a corpore deſcripta fiat plana. Nam ſit $AO = f$, et ponatur $x - f = t$, et $dx = dt$; erit $tdzddy - tdyddz = zdtddy - ydtddz$; hincque $\frac{ddy}{tdy - ydt} = \frac{ddz}{tdz - zdt}$. Multiplicetur per t, quo habeatur $\frac{tddy}{tdy - ydt} = \frac{tddz}{tdz - zdt}$. Quae aequatio ob dt conſtans eſt integrabilis; namque erit $tdy - ydt = \alpha tdz - \alpha zdt$. Haec diuiſa per tt et integrata dabit $\frac{y}{t} = \frac{\alpha z}{t} + \beta$, ſeu $y = \alpha z + \beta x - \beta f$. Quam perſpicuum eſt eſſe ad ſuperficiem planam.

Corollarium 5.

817. At ſi ponatur tangens anguli inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans, huius modi aequatio $\alpha x + y + \beta z = f$ non prodit; Atque aliunde manifeſtum eſt orbitam a corpore deſcriptam tum non neceſſario eſſe planum.

Corollarium 6.

818. Quare ne curua a corpore deſcripta ſit plana, neque punctum O, neque angulus POR inuariabiles accipi poſſunt. Haec autem ſi ſint variabilia, nihilo tamen minus angulus inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans eſſe poteſt.

Co-

Corollarium 7.

819. Linea interſectionis RO, quae in Aſtronomia linea nodorum appellatur, ſi non habeat conſtantem poſitionem, conuertitur circa punctum S. Nam recta mMS poſita eſt in plano elementorum Mm et praecedentis. Quare interſectio RO et praecedens ſe in S decuſſabunt.

Corollarium 8.

820. Punctum igitur hoc S eſt in eo loco, vbi eſt $AT = \frac{xdz - zdx}{dz}$ et $ST = \frac{z\,dy - ydz}{dz}$. Ex quibus poſitio puncti S cognoſcitur.

Corollarium 9.

821. Si ponatur punctum S inuariabile, erit $xdz - zdx = adz$ et $zdz - ydz = bdz$, vnde reperitur $x - a = \alpha z$ et $y - b = \beta z$. Hoc igitur caſu orbita a corpore deſcripta non ſolum eſt plana, ſed etiam linea recta; quia proiectio eius $Qq\zeta$ ſit recta, et propter $y - b = \beta z$ etiam $Mm\mu$.

Scholion.

822. Expoſitis nunc principiis, quae ad motum corporum in ſuperficiebus non planis pertinent, ipſa tractatio vt prior de motu in plano in duas partes poteſt diuidi. In quarum prima docebimus ex datis viribus inuenire curuam a corpore deſcriptam, in altera vero oſtendetur, ſi data fuerit curua, quam corpus deſcribit, quales vires ad hoc requirantur. Hic vel curua ipſa tantum poteſt eſſe

data, vel ſimul quoque celeritas corporis in ſingulis locis.

PROPOSITIO 100.

Problema.

Tabula X. Fig. 2. 824. *Si corpus ſollicitetur a tribus potentiis quarum directiones* Mf, Mg *et* MQ *ſint parallelae tribus coordinatis* AP, PQ *et* QM; *determinare motum corporis et orbitam, in qua mouebitur.*

Solutio.

Quia Mf et Mg ſunt parallelae ipſis AP et PQ, erit planum fMg parallelum plano APQ. In hoc plano ducatur Mi parallela elemento Qq, erit haec Mi quoque poſita in plano Mq. In elementum mM productum demittatur ex Q perpendiculum Qd; atque ex f et g in Mi perpendicula fi et gk. Deinde ex i et k in Md cadant perpendicnla ib et kc. Erunt autem fi et gk perpendiculares in planum Mq, quia planum fMg eſt normale ad planum Mq. Manentibus nunc vt ante $AP = x$, $PQ = y$; et $QM = z$: ſit vis corpus ſecundum Mf trahens $= P$; vis, quae corpus ſecundum Mg trahit $= Q$ et vis ſecundum MQ trahens $= R$. Hae igitur vires, vt earum effectus cognoſcantur, reſolui debent in vires tangentialem iuxta Mm agentem; normalem ad Mm in plano MQ ſitam, et normalem ad planum Mq. Ob ang. $Mfi = Qqp$ erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = P : \frac{P dy}{\sqrt{(dx^3 + dy^2)}}$ exprimitque $\frac{P dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ vim ex P ortam ſecundum if agentem, et ſi P ſola ageret foret per (802)

M=

$M = -\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde vis ſecundum Mi trahens erit $= \frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec porro reſoluitur in vim ſecundum bi trahentem $= \frac{Pdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim ſecundum Mb trahentem $= \frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex P igitur erit $N = -\frac{Pdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $T = -\frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Simili modo vis Q, cuius directio eſt Mq, reſoluitur in vim ſecundum kg agentem $= \frac{Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et vim ſecundum $Mk = \frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec vlterius reſoluitur in vim ſecundum $ck = \frac{Qdydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim ſecundum $Mc = \frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quare ſi haec vis ſola ageret; haberetur $T = -\frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = -\frac{Qdydz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $M = \frac{Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Denique vis R directionem MQ habens reſoluitur in vim ſecundum $Md = \frac{Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim ſecundum $dQ = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex vi R igitur foret $T = -\frac{Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $N = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Omnibus igitur hiſce tribus viribus P, Q et R ſimul agentibus erit vis tangentialis ex omnibus orta $T = -\frac{Pdx - Qdy - Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$, vis normalis in plano Mq, quae poſita eſt $N = -\frac{Pdxdz - Qdydz + Rdx^2 + Rdy^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque altera vis normalis $M = -\frac{Pdy + Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. His valoribus loco T, N et M in aequationibus §. 809 ſubſtitutis prodibunt tres ſequentes aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz$; $\frac{2vdydzddy - 2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)$, atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy$

 $-Qdx$;

$-Qdx$. Quae aequationes motum corporis determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

824. Duae hae poſteriores aequationes dant iſtam analogiam: $dydzddy - ddz(dx^2 + dy^2) : dxddy = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2 + dy^2) : Pdy - Qdx$. Ex qua reperitur $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$.

Corollarium 2.

Tabula X. Fig. 1. 825. Planum ergo $Mm\mu$, in quo ſunt elementa Mm et $m\mu$ hoc modo definitur. Erit $AO = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy} = -\frac{Pydz + Pzdy + Qxdz - Qzdx + Rydx - Rxdy}{Qdz - Rdy}$; et tang. angulus $POR = -\frac{Qdz + Rdy}{Paz - Rdx}$. Atque tangens anguli, quem planum $Mm\mu$ facit cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2)}}{Pdy - Qdx}$.

Corollarium 3.

826. Si potentia P euaneſcat, reperitur $Q = -\frac{2vddy}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et $R = -\frac{dv}{dz} + \frac{2vdyddy}{dz(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, ex duabus aequationibus inuentarum. Et ex tertia prodibit $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, cuius integralis eſt $vdx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ ſeu $dx\sqrt{v} = \sqrt{a}(dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Corollarium 4.

827. Hac igitur hypotheſi erit tempus ſeu $\int\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{v}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Ex quo intelligitur

tur motum corporis progreſſiuum ſecundum axi AP parallelas eſſe vniformem.

Corollarium 5.

828. Eadem porro hypotheſi erit $Q = -\frac{2ad\,dy}{dx^2}$ et $R = -\frac{2addz}{dx^2}$, propter $ddy : ddz = Q : R$ (824). Ex quibus aequationibus ipſa curua a corpore deſcripta determinabitur.

Scholion.

829. Ex reſolutione potentiarum facile perſpicitur ad tres potentias, quas in hac propoſitione conſiderauimus, omnes omnino potentias, quae excogitari poſſunt, reduci poſſe. Quare cum datis his potentiis non difficulter curua a corpore deſcripta inueniatur, etiam pro quibusque caſibus propoſitis iſta propoſitio maximam habebit vtilitatem.

PROPOSITIO 101.

Problema.

830. *Si corpus perpetuo vrgeatur verſus axem AP ſecundum perpendicula MP a corpore ad axem demiſſa; determinari oportet motum corporis.* Tabula X. Fig. 3.

Solutio.

Ductis coordinatis vt ante AP, x; PQ, y; et QM, z: erit $MP = \surd(y^2 + z^2)$. Sit vis ſecundum MP agens $= V$, eaque reſoluatur in duas ſecundum MQ et Mg trahentes, vbi Mg eſt parallela ipſi PQ

eique

eique aequalis. Erit igitur vis ſecundum MQ agens $= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et vis ſecundum $Mg = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. His cum propoſitione praecedente comparatis erit $P = o$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Quare habebitur $ddy : ddz = Q : R = y : z$ (828) atque $yddz = zddy$ ſeu $yddz - zddy = o$; cuius aequationis integralis eſt $ydz - zdy = bdx$. Porro erit $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2addy}{dx^2}$. Quae aequationes coniunctae determinant curuam a corpore deſcriptam. Corporis autem celeritas dabitur per aequationem $vdx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ſeu ipſa celeritas erit $= \frac{\sqrt{a(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

831. Ponatur $dx = pdy$, erit ob dx conſtans, $o = pddy + dpdy$ ſeu $ddy = -\frac{dpdy}{p}$. His ſubſtitutis ad cognoscendam curuam deſcriptam habebuntur iſtae aequationes $ydz - zdy = bpdy$ et $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{2adp}{p^3dy}$.

Corollarium 2.

832. Si porro ponatur $z = qy$, iſtae aequationes tranſibunt in $y^2dq = bpdy$ et $\frac{V}{\sqrt{(1+qq)}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quae etiam tres continent variabiles.

Scholion 1.

833. Ad haec clarius exponenda maxime conuenit exempla adhibere. Quamobrem aliquot afferemus in quibus vis V a diſtantia MP pendere ponitur, eamque poteſtatibus aliquibus ipſius MP proportionalem ponemus; quo iſte motus cum mo-

motu in plano a vi centripeta diſtantiarum poteſtati cuidam proportionali comparari poſſit. Inter hos enim caſus magna eſt ſimilitudo, cum quod eſt in plano centrum virium hoc loco eſt quaſi axis virium, ad quem corpus perpetuo attrahitur. Atque ſi initio corpus ita proiiciatur, vt non habeat motum progreſſiuum ſecundum axem AP, motus eius fiet in plano PQM, et corpus attrahetur perpetuo ad punctum P centrum virium.

Exemplum I.

834. Sit vis V diſtantiae MP directe proportionalis, ponaturque $V = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f}$. Erit ergo $\frac{y}{f} = \frac{2adp}{p^3 dy}$ (831) et integrando $\frac{y^2}{2f} = C - \frac{a}{p^2}$. ſeu $\frac{1}{pp} = \frac{2cf-yy}{2af}$ et $p = \frac{\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$. Cum autem ſit $dq = \frac{bpdy}{y^2}$ (832) erit $\frac{bdy\sqrt{2af}}{y^2\sqrt{(2cf-y^2)}} = dq$. Cuius integralis eſt $q = \alpha - \frac{\beta\sqrt{(2cf-y^2)}}{y}$, denotante $\beta = \frac{b\sqrt{2af}}{2cf}$. Quare habebitur $z = \alpha y - \beta\sqrt{(2cf-y^2)}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae deſcriptae in plano ad axem AP normali, quam igitur perſpicitur eſſe ellipſin, cuius centrum in axe AP eſt poſitum. Deinde cum ſit $dx = pdy$, erit $dx = \frac{dy\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae quaeſitae in plano APQ. Haec itaque eſt linea ſinuum *Leibnitiana*, cum abſciſſa x ſit vt arcus, cuius ſinus eſt applicata y.

Exemplum 2.

835. Si fuerit vis V reciproce vt quadratum diſtantiae MP; ſeu $V = \frac{ff}{y^2+z^2} = \frac{ff}{yy(1+q^2)}$, ob $z = qy$.

Quamobrem habebitur $\frac{ff}{y^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quia autem eſt $dy = \frac{y^2dq}{bp}$ (832), erit $\frac{f^2dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2abdp}{p^2}$; cuius integralis eſt $\frac{ffq}{\sqrt{(1+qq)}} = C - \frac{2ab}{p} = C - \frac{2ab^2dy}{y^2dy}$, loco p ipſius valore $\frac{y^2dq}{bdy}$ ſubſtituto. Hinc fit $\frac{f^2qdq}{\sqrt{(1+q^2)}} = Cdq - \frac{2ab^2dy}{y^2}$, et integrando $f^2\sqrt{(1+q^2)} = Cq + \frac{2ab^2}{y} + D$. Quare dum ſit $q = \frac{z}{y}$; prodibit $f^2\sqrt{(y^2+z^2)} = Cz + Dy + 2ab^2$. Quae eſt aequatio pro proiectione curuae deſcriptae in plano ad axem AP normali; quam igitur colligi poteſt eſſe ad ſectionem conicam, cuius alteruter focus ſit in axe AP poſitus.

Scholion 2.

836. Ex his intelligitur proiectiones curuarum deſcriptarum in plano ad axem AP normali, congruere cum curuis, quas corpora in hoc plano mota deſcriberent ab eadem vi ſollicitata. Neque autem hoc mirum eſt; nam motus, quem hoc loco conſideramus, reduci poteſt ad motum in plano ad axem AP normali factum a corpore ad axem perpetuo attracto; dummodo huic plano motus vniformis ſecundum axem AP impreſſus concipiatur. Namque iſte motus progreſſiuus, quia fit vniformiter in directum, motum corporis in plano turbare nequit. Haec igitur conuenientia iam deduci potuiſſet ex 827, vbi ſi vis P euaneſcit, motus corporis

ris ſecundum axem progreſſiuus aequabilis eſt oſtenſus. Quamobrem quoties vis P in nihilum abit; tum ſemper motus quaeſitus ad motum in plano factum poteſt reduci. Hoc ſcilicet fiet ſi plano ad axem AP normali tantus motus retro ſecundum PA imprimatur, quantum habere inuentum eſt ſecundum AP progreſſiuum (827).

Scholion 3.

837. Interim tamen hoc maxime attendi meretur, quod tam facile in exemplis propoſitis aequationes inter coordinatas orthogonales pro curuarum proiectionibus in plano ad axem AP normali atque adeo pro ipſis curuis a corpore deſcriptis ſi motus progreſſiuus euaneſcat, inuenerimus. In huius capitis enim priore parte qua motus in plano a vi centripeta generales conſiderauimus, multo maiore opus fuit labore et comparatione arcuum circularium vt ad aequationes conſuetas pro curuis deſcriptis perueneriмus. Maior igitur generalitas, quae ſaepiſſime inuentionem quaeſiti difficiliorem reddit, hoc loco non ſolum non eſt impedimento, ſed etiam facillime id determinat, quod in particulariori ſenſu difficile erat inuentu.

Corollarium 3.

838. In caſu huius propoſitionis planum elementorum Mm et $m\mu$ facile determinatur. Nam ob $ddy:ddz = y:z$ erit $PO = o$ et $AO = x$, incidetque O in Tabula X. Fig. 1.

in P. Porro tang. ang. POR $=\frac{ydz-zdy}{zdx}=\frac{b}{z}$ ob $ydz-zdy=bdx$. Cotangens igitur anguli POR eſt vt QM. Denique tangens anguli inclinationis plani $Mm\mu$ ad planum APQ eſt $=\frac{\sqrt{(z^2+b^2)}}{y}$.

Scholion 4.

839. Cum caſus, quo vis P euaneſcit, ad motum in plano poſſit reduci; reduci quoque poterit ad motum in plano ſi vel Q vel R deſit. Nam ſi axis capiatur in recta ad AP normali in plano APQ, vis Q directionem habebit axi parallelam, et reliquae P et R tractabuntur, vt ante Q et R. At ſi axis ſumatur normalis ad AP et ad planum APQ, vis R locum vis P axi parallelae occupabit. Scilicet quemadmodum coordinatae x, y et z reſpectu ſitus inter ſe poſſunt commutari, ſimiliter etiam de viribus P, Q et R eſt iudicandum.

PROPOSITIO 102.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1. 840. *Si corpus in ſingulis punctis* M *duplici vi ſollicitetur vna cuius directio eſt* MA; *et altera cuius directio eſt* MQ *normalis ex* M *in planum* APQ *demiſſa: oportet determinari motum corporis* M, *et orbitam eius.*

Solutio.

Ducta MP, quae ſit normalis in AP, vis MA reſoluatur in vires ſecundum Mf ipſi AP parallelam, et ſecundum MP agentes. Haec vero vis iuxta MP re-

reſoluitur in vires ſecundum MQ et Mg agentes. Poſitis igitur vt ante AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$; et vi ſecundum MA trahente $=$V, et vi ſecundum MQ$=$W, atque reſolutione virium inſtituta et comparatione facta cum prop. 100. reperietur $P=\frac{Vx}{\surd(x^2+y^2+z^2)}$, $Q=\frac{Vy}{\surd(x^2+y^2+z^2)}$ et $R=W+\frac{Vz}{\surd(x^2+y^2+z^2)}$. Atque ex aequationibus eiusdem prop. prodibit $V=\frac{2vdxddy\surd(x^2+y^2+z^2)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $W=\frac{2vddy(xdz-zdx)-2vddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex his inuenitur $\frac{dv}{2v}=\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-\frac{xddy}{xdy-ydx}$; hincque integrando $l\surd v=l\frac{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}+la\surd a$, ſeu $\surd v=\frac{a\surd a(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$; ſiue $v=\frac{a^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$. Hic valor loco v ſubſtitutus dat has aequationes $V=\frac{2a^3dxddy\surd(x^2+y^2+z^2)}{(xdy-ydx)^3}$ et $W=\frac{2a^3ddy(xdz-zdx)-2a^3ddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)^3}$. Ex quibus curua deſcripta determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

841. Tempus quo corpus in M vsque peruenit, eſt $\int\frac{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}{\surd v}$. Cum autem ſit $\surd v=\frac{a\surd a(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$, erit illud tempus $=\frac{\int xdy-\int ydx}{a\surd a}$, quod per quadraturam proiectionis curuae deſcriptae in plano APQ cognoſcitur.

Corollarium 2.

842. Si ponatur $y=px$ et $z=qx$; prodibunt ſequentes aequationes $V=\frac{2a^3dx(xddp+2dxdp)\surd(1+p^2+q^2)}{x^5dp^3}$

 et

et $W = \frac{2a^3 dq\, ddp - 2a^3 dp\, ddq}{x^3 dp^3}$, Quae ad curuam cognoſcendam inſeruiunt.

Exemplum.

843. Si vis V fuerit diſtantiae *MP* proportionalis et vis W perpendiculo *MQ*; ponatur $V = \frac{\surd(x^2+y^2+z^2)}{f}$ et $W = \frac{z}{g}$, vt itaque ſit $V = \frac{x\surd(1+p^2+q^2)}{f}$ et $W = \frac{qx}{g}$. Quare per aequationes praeced. Coroll. erit $x^6 dp^3 = 2a^3 f dx(x\, ddp + 2dx\, dp)$ et $x^4 q\, dp^3 = 2a^3 g\, dq\, ddp - 2a^3 g\, dp\, ddq$. Illius aequationis integralis eſt $x^2 = C - \frac{2a^3 f dx^2}{x^4 dp^2}$; ex qua oritur $dp = \frac{a\,dx\surd 2af}{x^2\surd(c^2-x^2)}$; huiusque integralis $p = \frac{y}{x} = C - \frac{a\surd 2af(c^2-x^2)}{c^2 x}$, ſeu $y = nx - \frac{a\surd 2af(c^2-x^2)}{c^2}$, pro aequatione proiectionis curuae deſcriptae in plano APQ, quae igitur eſt ellipſis, cuius centrum in A eſt poſitum. Ex inuento ipſius dp valore erit porro $ddp = -\frac{a\,dx^2(2c^2-3x^2)\surd 2af}{x^3(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ quibus loco dp et ddp valoribus in altera aequatione ſubſtitutis orietur $afqx\,dx^2 = -2accg\,dx\,dq + 3agx^2 dx\,dq - ac^2 gx\,ddq + agx^3 ddq$. Ponatur $q = e^{\int r dx}$ prodibit $fx\,dx = -c^2 gx\,dr + gx^3 dr - 2ccgr\,dx + 3gx^2 r\,dx - c^2 gxr^2 dx + gx^3 r^2 dx$. Fiat $r = \frac{u}{x^2\surd(c^2-x^2)}$, prouenietque $fx\,dx = -\frac{g\,du\surd(cc-x^2)}{x} - \frac{gu^2 dx}{x^3}$ ſeu $du + \frac{u^2 dx}{x^2\surd(c^2-x^2)} + \frac{fx^2 dx}{g\surd(c^2-x^2)} = 0$. Quae poſito $t = \frac{\surd(c^2-x^2)}{x}$ ſeu $x = \frac{c}{\surd(1+tt)}$ tranſibit in hanc;
Tabula X. Fig. 1. $du - \frac{u^2 dt}{cc} = \frac{ccf\,dt}{g(1+tt^2)^2}$; cuius integrale poſtea exhibebimus. Ad planum cognoscendum, in quo elementa Mm et $m\mu$ ſunt ſita, ob $ddy : ddz = gx\,dy - gy\,dx : gx\,dz$

$gxdz - hzdx$ poſito h loco $f+g$ reperietur $AO = \frac{fz(xdy-ydx)}{hzdy-gydz}$; tang. ang. $POR = \frac{hzdy-gydz}{gxdz-hzdx}$. Atque tang. ang. plani $Mm\mu$ cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((hzdy-gydz)^2+(gxdz-hzdx)^2)}}{g(xdy-ydx)}$. Denique tempus quo corpus in M peruenit cum ſit $= \frac{\int xxdp}{a\sqrt{a}}$, erit $= \int \frac{dx\sqrt{2f}}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Erit itaque hoc tempus proportionale angulo cuius ſinus eſt abſciſſa x, exiſtente ſinu toto $= c$, ſeu cuius ſinus eſt $\frac{x}{c}$, ſi ſinus totus capiatur $= 1$. Ex quo perſpicitur motum corporis in proiectione in plano APQ facta angularem circa A eſſe vniformem, et tempus vnius reuolutionis eſſe vt $\sqrt{f}$.

Corollarium 3.

844. Proiectio curuae deſcriptae in plano APQ fit circulus, ſi eſt $n=0$ et $-a\sqrt{2af} = cc$; cuius centrum eſt in A et radius $= c$. Erit igitur $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$. Atque z dabitur ex hac aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, quae aeque late patet ac caſus exempli praecedentis, etiamſi hic caſus particularis ſit conſideratus.

Corollarium 4.

845. Ad inuentum ipſius z valorem ex aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, pono $z = e^{\int rdx}$. Quo facto prodibit aequatio differentialis primi gradus haec: $gdr + gr^2dx = \frac{grxdx-hdx}{cc-xx}$. Fiat $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ prodibitque $gdu + \frac{gu^2dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{hdx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$. Poſito $\frac{h}{g}$ ſeu $\frac{f+g}{g} = m^2$,

$= m^2$, orietur aequatio iſta $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\surd(c^2-x^2)} = 0$, in qua indeterminatae iam ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

Corollarium 5.

846. Eſt vero $\int \frac{dx}{\surd(c^2-x^2)} = +\surd -1\, l(\surd(cc-xx) - x\surd -1)$ et $\int \frac{du}{u^2+m^2} = \frac{1}{2m\surd -1}\, l\frac{u-m\surd -1}{u+m\surd -1}$. Addita igitur conſtante et ſumtis numeris habebitur $\left(\frac{\surd(cc-xx) - x\surd -1}{b}\right)^{2m} = \frac{u-m\surd -1}{u+m\surd -1}$ hincque $u = \frac{(b^{2m} + (\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^{2m})\, m\surd -1}{b^{2m} - (\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^{2m}}$.

Corollarium 6.

847. Cum vero ſit $lz = \int r dx$, atque $r = \frac{u}{\surd(c^2-x^2)}$ erit $lz = \int \frac{m\,dx\,(b^{2m} + (\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^{2m})\surd -1}{(b^{2m} - (\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^{2m})\surd(c^2-x^2)}$. Ponatur $\int \frac{dx}{\surd(c^2-x^2)} = s$; erit $s = \surd -1\, l\frac{\surd(c^2-x^2) - x\surd -1}{b}$ et $e^{\frac{s}{\surd -1}} b = \surd(c^2-x^2) - x\surd -1$, atque $lz = \int \frac{m\,ds\,(1 + e^{\frac{2ms}{\surd -1}})\surd -1}{1 - e^{\frac{2ms}{\surd -1}}}$, ſeu poſito $e^{\frac{2ms}{\surd -1}} = t$ vt ſit $ds = \frac{dt\surd -1}{2mt}$, erit $lz = \int \frac{-dt(1+t)}{2t(1-t)} = l\frac{(1-t)k}{\surd t}$, vnde fit $z = \frac{(1 - e^{\frac{2ms}{\surd -1}})k}{e^{\frac{ms}{\surd -1}}} = \frac{(b^{2m} - (\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^{2m})k}{b^m(\surd(c^2-x^2) - x\surd -1)^m}$

Corollarium 7.

848. Inuento nunc valore ipſius z erit $dz =$
$$\frac{mzdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}.$$ Atque
$$\frac{gxdz-hzdx}{z}=\frac{mgdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})x\sqrt{-1}-m^2gdx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$$
Porroque poſito $y=\sqrt{(c^2-x^2)}$ erit $\frac{hzdy-gydz}{z}=-\frac{m^2gxdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}-$
$$\frac{mgdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}}.$$

Corollarium 8.

849. Ex his denique inuenietur $AO =$
$$\frac{fcc(b^{2m}-(\sqrt{c^2-x^2})-x\sqrt{-1})^{2m})}{m^2gx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}+mg(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}$$, et tang.
$$POR=\frac{mx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})+(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}{m(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}-x(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}.$$
Simili modo ex his inuenitur angulus inclinationis plani, in quo corpus mouetur, ad planum APQ.

Scholion.

850. Inuentorum valorum ipſius z et orbitae inclinationis applicatio fit ad modum difficilis ob quantitates imaginarias inuicem permixtas. Hanc ob rem iis longius immorari noluimus ad interſectiones curuae a corpore deſcriptae cum plano APQ determinandas. Quia autem magni eſt momenti haec quaeſtio in Aſtronomia ad motum nodorum inueniendum, ſequens huic negotio deſtinata eſt propoſitio, in quo loco, vbi corpus motu ſuo in planum APQ perueniat, inueſtigabimus. Corpus enim partim ſupra hoc planum motum ſuum abſoluit partim infra; et ſiue ſupra ſit ſiue infra, corpus perpetuo trahitur altera vi W ad hoc planum in ratione directa diſtantiae ab hoc plano. Punctum vero in plano APQ, per quod corpus ex ſuperiore parte in inferiorem tranſit vocatur nodus deſcendens, punctum vero per quod in ſuperiora reuertitur nodus aſcendens.

PROPOSITIO 105.

Problema.

851. *Si corpus attrahatur perpetuo partim ad* Tabula XI. Fig. 1. *punctum fixum* A *in ratione diſtantiarum ab eodem, partim normaliter ad planum* APQ *in ratione quoque diſtantiarum ab hoc plano: determinare nodos ſeu puncta, in quibus corpus in hoc planum peruenit; et praeter-*

terea etiam puncta, in quibus corpus ab hoc plano maxime diſtat.

Solutio.

Manentibus vt ante tribus coordinatis x, y et z, atque vi, qua corpus ad A trahitur $=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$, ac vi, qua corpus ad planum APQ trahitur $=\frac{z}{g}$, poſitoque $\frac{f+g}{g}=m^2$: manifeſtum eſt corpus in ipſum planum APQ incidere, vbi erit $z=0$. Fit autem $z=0$, quoties eſt $b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=0$ (847). Hocque euenit quoties eſt $u=\infty$ (846). Cum igitur ſit $\frac{du}{u^2+m^2}+\frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}=0$ (845), centro A deſcribatur circulus BQC, radio AB$=c$; corpusque iuxta plagam BQC moueatur; et loco illius aequationis ſumatur haec aequiualens $\frac{\frac{c^3}{m^2}du}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2}+\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}=0$; ſeu $\frac{1}{m}\cdot\frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2}=-\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Cuius integralis eſt $\frac{1}{m}\int\frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2}=C-\int\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$; in qua $\int\frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{ccuu}{m^2}+c^2}$ exprimit arcum cuius tangens eſt $\frac{cu}{m}$, et $\int\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ arcum BQ cuius ſinus eſt AP$=x$. Sit C arcus BQC, ſeu quadrans circuli, et tangens CS$=\frac{cu}{m}$, cui reſpondeat arcus CR. Tranſibit ergo illa aequatio in hanc $\frac{1}{m}$CQR$=$CQ, atque CR$=m.$ CQ. Ex hoc perſpicuum eſt fore $u=\infty$,

 quo-

quoties angulus CAR fuerit rectus, vel aequalis tribus aut quinque aut 7 etc. rectis. Sequendo itaque corporis motum, erit u infinitum, ſi arcus CR ſucceſſiue fiat aequalis ſequentibus graduum numeris; 90; -90; -270; -450; -630; etc. Tunc autem arcus CQ tenebit gradus; $\frac{90}{m}$; $-\frac{90}{m}$; $-\frac{270}{m}$; $\frac{450}{m}$; $-\frac{630}{m}$; etc. atque arcus BQ: $90-\frac{90}{m}$; $90+\frac{90}{m}$; $90+\frac{270}{m}$; $90+\frac{450}{m}$; $90+\frac{630}{m}$; etc. Quare ſi corpus alicubi fuerit in nodo, ad alios nodos perueniet ſucceſſiue abſolutis motu angulari circa A angulis graduum: $\frac{180}{m}$; $\frac{360}{m}$; $\frac{540}{m}$; $\frac{720}{m}$; etc. Duo igitur nodi proximi a ſe inuicem diſtabunt angulo $\frac{180}{m}$ grad. Atque nodus aſcendens vel deſcendens diſtabit a ſequente nodo eiusdem nominis angulo $\frac{360}{m}$ grad. i. e. angulo $\frac{360.\sqrt{g}}{\sqrt{(g+f)}}$ grad. Q. E. Prius.

Maxime deinde corpus a plano APQ diſtabit, vbi erit $dz=o$; id quod euenit quoties $b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=o$ (848). His autem in caſibus fit $u=o$. Manente ergo priore conſtructione euadet $u=o$, quoties fit $CR=o$, vel -180, vel -360; etc. grad. Tum autem arcus CQ continebit gradus; o, $-\frac{180}{m}$, $-\frac{360}{m}$, $-\frac{540}{m}$, etc. ideoque arcus BQ habebit gradus: 90; $90+\frac{180}{m}$; $90+\frac{360}{m}$; $90+\frac{540}{m}$, etc. Maxima igitur corporis a plano APQ diſtantia aequaliter diſtat a nodis vtrinque proximis. Q. E. Poſterius.

Co-

Corollarium 1.

852. Nodi igitur in idem tandem recident punctum ſi fuerit m numerus rationalis ſeu $\frac{(f+g)}{g}$ numerus quadratus. At ſi $\frac{f+g}{g}$ non fuerit numerus quadratus, corpus nunquam in eodem puncto in planum APQ incidet, in quo ante aliquando inciderit.

Corollarium 2.

853. Si f eſt numerus affirmatiuus, ſeu ſi corpus perpetuo ad planum attrahatur vi poſitiua; erit m numerus vnitate maior. Interuallum ergo inter duos nodos proximos minus erit quam ang. 180 grad. Quare nodi retrograediuntur: et nodus ſequens ab oppoſitione praecedentis nodi diſtabit angulo $\frac{180(m-1)}{m}$ grad.

Corollarium 3.

854. Si corpus perpetuo a plano APQ repellatur fit g numerus negatiuus, atque $m = \sqrt{\frac{g-f}{g}}$. Quare ſi $g > f$, eſt m numerus realis ſed vnitate minor; tum igitur nodi in conſequentia progrediuntur eo celerius, quo minus f ab g diſtabit. Atque ſi $f = g$, tum corpus e nodo egreſſum nunquam in ſuperficiem APQ reuertetur. At ſi $f > g$, corpus perpetuo ab hoc plano diſcedet.

Corollarium 4.

855. Quia corpus a plano APQ maxime diſtat, quando ſit $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=-b^{2m}$: ipſa maxima diſtantia habebitur, ſi in valore ipſius z inuento (847), haec fiat ſubſtitutio. Inuenietur autem haec maxima diſtantia $=\frac{2k}{\sqrt{-1}}$, quae igitur vbique eſt eadem.

Corollarium 5.

856. Si hic circulus BQC fuerit proiectio orbitae a corpore deſcriptae in plano APQ, erit anguli inclinationis plani orbitae ad planum APQ tangens $=\frac{2k}{c\sqrt{-1}}$ in locis vbi corpus maxime ab hoc plano diſtat; ſeu $=\frac{2k}{c}$ poſito k loco $\frac{k}{\sqrt{-1}}$, cum conſtans k talem debeat habere valorem ad imaginaria euitanda.

Corollarium 6.

857. Eadem manente hypotheſi, in locis vbi corpus in planum APQ incidit tangens anguli inclinationis erit $=\frac{dz\sqrt{(c^2-x^2)}}{cdx}$, exiſtente $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=b^{2m}$. Fiet itaque iſta tangens

$$=\frac{mz(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})c}$$

(et loco z ſuo poſito valore) $=\frac{2mk\sqrt{-1}}{c}$ ſeu

ido-

idoneo loco k valore ſubſtituto erit illa tangens $= \frac{2mk}{c}$.

Corollarium 7.

858. Tangens igitur inclinationis orbitae a corpore deſcriptae ad planum APQ, ſi corpus a plano APO maxime diſtat eſt ad eandem tangentem ſi corpus in hoc planum incidit vt 1 ad m. Fiet ergo vt diſtantia duorum nodorum ad 180 gradus, ita inclinatio orbitae, ſi corpus a nodis maxime diſtat, ad inclinationem orbitae a corpore deſcriptae, ſi corpus in ipſis verſatur nodis.

Scholion.

859. Haec quidem propoſitio parum vtilitatis habere videtur in aſtronomia, eo quod vim, qua corpus ad punctum fixum A trahitur, diſtantiae proportionalem faciamus; in corporibus vero coeleſtibus vis reciproce quadratis diſtantiarum proportionalis locum habeat. Vſus tamen eius eximius eſt, ſi orbitae corporum non multum a circulis differant; nam orbita in circulum abeunte, nihil intereſt, quomodocunque vis centripeta a diſtantiis pendeat. Quamobrem cum orbitae planetarum non multum a circulis diſcrepent, haec propoſitio bono cum ſucceſſu

ad

ad eos motus poteſt accommodari. Hocque tum maxime eſt faciendum, vt linea f inueniatur, quae ſe habeat ad corporis a centro diſtantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo diſtantiae proportionalis effici poteſt; id tamen ſi non accidat, litera g vt variabilis debet conſiderari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi, inter omnes ipſius g valores quaſi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta noſtram determinationem fit in antecedentia. Obſeruatur autem nodi ab oppoſitione praecedentis nodi diſtantia fere 43′, ita vt ſit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1\frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum eclipticae perpetuo trahens a poſteriore poteſt cognosci.

CA-

CAPUT SEXTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 104.
Theorema.

860.

Si corpus moueatur in medio reſiſtente a quotcunque potentiis abſolutis ſollicitatum: vis reſiſtentiae actionem potentiarum abſolutarum aliter non turbat, niſi quod vim tangentialem ex illis ortam minuat.

Demonſtratio.

Ex capite praecedente ſatis intelligitur omnes potentias abſolutas reſolui poſſe in duas vires tangentialem et normalem, ſi quidem motus ſit in eodem plano. At ſi corpus non in eodem mouetur plano, tum tres vires aequiualentes aſſignari poſſunt loco quotcunque potentiarum ſollicitantium, quarum vna eſt tangentialis et duae normales. Vis autem, quam reſiſtentia in corpus exerit, directio ſemper congruere ponitur cum directione corporis (117). Quamobrem vis reſiſtentiae ad vim tangentialem eſt referenda, quam

 im-

imminuit, quia motum corporis retardat; vires vero normales prorſus non afficit. Manifeſtum igitur eſt reſiſtentiam potentiarum abſolutarum effectum aliter non turbare, niſi quatenus vis tangentialis ex iis orta a reſiſtentia minuitur. Q. E. D.

Corollarium 1.

861. Reſiſtentiae igitur effectus totus in alteranda corporis celeritate conſiſtit, neque eius directionem immutat, niſi quatenus virium normalium actio variatur variata celeritate.

Corollarium 2.

862. Niſi igitur praeter reſiſtentiam adſint potentiae abſolutae, fieri non poteſt, vt corpus in linea curua moueatur, ſed perpetuo in recta moueri perget, quoad motum ſuum perdiderit.

Scholion 1.

863. In hoc igitur capite, quo motus curuilineos tractabimus, neceſſe eſt, vt cum reſiſtentia ſimul potentias abſolutas conſideremus; easque tales, quae reſolutione praebeant vim normalem, ne in eandem rem capite 4. pertractatam incidamus. Hanc ob rem primo potentiam ad punctum infinite diſtans tendentem, ſeu directionem ſibi perpetuo parallelam conſeruantem conſiderabimus. Deinde ad vires centripetas progrediemur, aliasque quouis modo diſpoſitas potentias. Denique etiam motus

non

non in eodem plano factos, quales oriantur in medio reſiſtente, examini ſubiiciemus.

Corollarium 3.

864. Si vis tangentialis ſit T, et vna ſeu duae normales N ſeu N et M, et vis reſiſtentiae R; canones effectum harum virium continentes, quos in praecedente capite dedimus, etiam hic locum habebunt, ſi modo in iis loco T ponatur T − R.

Scholion 2.

865. Quemadmodum reſiſtentiam, cuius vis a celeritate corporis pendere ponitur, exponi oporteat per legem reſiſtentiae et exponentem in cap. 4. fuſe eſt oſtenſum. Hoc vero capite varietas reſiſtentiae magnum campum rerum pertractandarum aperiet, quae in capite praecedente locum non inueniebant. Praeterea hanc tractationem ita ſubdiuidemus, vt primo ex datis potentiis abſolutis et reſiſtentia curuam deſcriptam et motum corporis in ea determinemus. Deinde ſi curua et potentia abſoluta fuerit data, ex his reſiſtentiam deducemus. Tertio ex data curua et reſiſtentia potentia abſoluta datam habens directionem erit inueſtiganda. Denique ex data curua, et celeritate corporis in ſingulis eius punctis et reſiſtentia, potentia abſoluta eiusque directio poterit inueniri. Primariam

autem huius capitis diuiſionem motus in eodem plano et non in eodem plano factus conſtituet.

PROPOSITIO 105.

Problema.

Tabula XI. Fig. 3.

866. *Si corpus moueatur in medio reſiſtente quocunque ſollicitatum a potentiis abſolutis quibuscunque ita tamen vt motum ſuum in eodem plano abſoluat; definire canones, quos in motu ſuo corpus obſeruat.*

Solutio.

Deſcribat corpus hac ratione ſollicitatum curuam AMB; ſit eius celeritas in M debita altitudini v, et curuae elementum $Mm = ds$. Ponatur porro vis normalis ex omnibus potentiis abſolutis orta $= N$, cuius ergo directio erit MN normalis in curuam; vis vero tangentialis ex iisdem potentiis abſolutis orta $= T$, cuius directio eſt MT tangens curuae in M. Atque vis reſiſtentiae in M ſit $= R$. His poſitis motus corporis definiri debet ex vi normali N et vi tangentiali $T - R$ (864). Sit iam radius osculi in $M = r$, eritque $N = \frac{2v}{r}$ (552) et $dv = (T - R)\,ds$; (cit.). Ex his duabus aequationibus, ſi eliminetur v, prodibit aequatio naturam curuae AMB exponens, ſimulque corporis in ſingulis locis celeritas ex aequatione $N = \frac{2v}{r}$ innoteſcit. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

867. Erit igitur $v = \frac{Nr}{2}$. Vnde habebitur $dv = \frac{Ndr + rdN}{2}$. Qui valor ſi in aequatione $dv = (T - R)ds$ ſubſtituatur loco dv, et in R ponatur $\frac{Nr}{2}$ loco v; prodibit aequatio pro curua a corpore deſcripta.

Corollarium 2.

868. Si in R, v vnicam habuerit dimenſionem, id quod accidit, ſi reſiſtentia eſt quadratis celeritatum proportionalis; aequatio $dv = (T - R)ds$, poterit ſeparari, ex eaque v determinari. Haecque aequatio cum $v = \frac{Nr}{2}$ coniuncta dabit ſimpliciorem aequationem pro curua deſcripta.

Scholion.

869. Praeter hunc caſum, quo v vnicam habet dimenſionem in R, plurimi dantur alii, quibus aequatio $dv = (T - R)ds$ poteſt integrari; ſed eos euoluere non eſt opus, cum nihilominus v poſſit eliminari. Hunc vero caſum ideo praecipue notauimus, quia reuera ad fluidorum reſiſtentiam pertinet, et quem propterea prae aliis diligentius examinabimus.

PROPOSITIO 106.

Problema.

870. *Tendat vis ſollicitans vbique normaliter ad rectam poſitione datam* AP; *et moueatur cor-* Tabula XI. Fig. 4.

 pus

pus in medio quocunque reſiſtente; determinare curuam AMB *in qua corpus mouebitur, et ipſum corporis motum.*

Solutio.

Sit vis quae corpus in M ſollicitat $=$P, cuius ergo directio erit MP. Celeritas corporis in M debeatur alt. v, et vis reſiſtentiae ibi ſit $=$R. Capiatur elementum Mm, ductaque mp ſit AP$=x$, PM$=y$ et M$m=ds$. Erit P$p=$M$r=dx$ et $mr=dy$. Porro ducatur tangens MT in eamque ex P perpendicularis PT. His factis vis P reſoluetur in normalem $\frac{P.PT}{PM}=\frac{Pdx}{ds}$ et tangentialem $\frac{P.MT}{MP}=\frac{Pdy}{ds}$. Quia autem haec vis tangentialis motum corporis retardat eius negatiuum eſt capiendum. Poſito igitur radio osculi in M$=r$, erit $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ et $dv=-Pdy-Rds$ (866). Ex quibus aequationibus tum ipſa curua tum motus corporis poterit inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

871. Poſito dx conſtante eſt radius osculi $r=-\frac{ds^3}{dxddy}$. Hanc ob rem habebitur ſequens aequatio $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$. Qui valor ipſius P in altera aequatione ſubſtitutus dabit aequationem $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-Rds$, ſeu ob $dyddy=dsdds$ haec $dv=\frac{2vdds}{ds}-Rds$. Quae aequatio locum habet, quaecunque fuerit potentia P, modo eius directio ſit MP.

Co-

Corollarium 2.

872. Si reſiſtentiae lex fuerit ratio quaecunque multiplicata celeritatum et exponens reſiſtentiae ſit quantitas vtcunque variabilis q ita vt ſit R $= \frac{v^m}{q^m}$, tum habebitur iſta aequatio $dv = \frac{2v\,dds}{ds} - \frac{v^m ds}{q^m}$, cuius integralis eſt $v^{1-m} = \frac{(m-1)\,dx^{2m-2}}{ds^{2m-2}} \int \frac{ds^{2m-1}}{q^m\,dx^{2m-2}}$.

Corollarium 3.

873. Si in eadem hypotheſi fuerit $m = 1$, erit $\frac{dv}{v} = \frac{2\,dds}{ds} - \frac{ds}{q}$, cuius integralis eſt $lv = 2\,l\frac{ds}{dx} - \int \frac{ds}{q}$, ſeu $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$. Si praeterea reſiſtentia fuerit vniformis ſeu $q = c$, erit $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{a\,ds^2}{dx^2}$ ſeu $v = \frac{a e^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dx^2}$. Tempus igitur hoc caſu quo arcus AM abſoluitur erit $= \int \frac{e^{\frac{s}{2c}} dx}{\sqrt{a}}$.

PROPOSITIO 107.

Problema.

874. *Si et potentia et medium reſiſtens ſit vniforme, illiusque directio ſit* MP *normalis in rectam datam* AP; *medium vero reſiſtat in ratione duplicata celeritatum, determinare motum corporis proiecti.* Tabula XI. Fig. 4.

Solu-

Solutio.

Ponatur potentia corpus perpetuo verſus AP trahens $=g$ et exponens reſiſtentiae $=c$, reliquae denominationes vero maneant vt ante. Erit igitur $P=g$ et $R=\frac{v}{c}$. Vnde orientur ſequentes aequationes $\frac{gdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ ſeu $gds^2+2vddy=0$ poſito dx conſtante; atque $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$. Ex his vero aequationibus coniunctis iam inuenimus $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ (873). Quare cum ſit $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ prodit eliminata v iſta aequatio $ge^{\frac{s}{c}}dx^2=-addy$, qua natura curuae deſcriptae continetur. Cum ſit $dsdds=dyddy$ erit etiam $ge^{\frac{s}{c}}dx^2dy=-2adsdds$. Ponatur $dx=pds$, erit $dds=-\frac{dpds}{p}$ et $dy=ds\surd(1-pp)$. His ſubſtitutis proueniet iſta aequatio $ge^{\frac{s}{c}}ds=\frac{2adp}{p^3\surd(1-pp)}$, quae ad conſtruendam curuam deſcriptam ſufficit. Aequationis vero huius integralis aequatio eſt $gce^{\frac{s}{c}}= C-\frac{a\surd(1-pp)}{p^2}-a.l\frac{1+\surd(1-p^2)}{p}$. Reſtituto vero $\frac{dx}{ds}$ loco p habetur $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{adyds}{dx^2}-al\frac{ds+dy}{dx}$. Quae eſt aequatio differentialis primi gradus atque ſimplicior reddi non poteſt. Q. E. I.

Corollarium I.

875. Pro curua deſcripta aequatio ſtatim differentialis tertii gradus prodit: Nam ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

erit $dv = -gdy + \frac{gds^2 d^3 y}{2ddy^2}$, quibus valoribus in aequatione $dv = -gdy - \frac{vds}{c}$ ſubſtitutis prodibit $dsddy = cd^3 y$.

Corollarium 2.

876. Sit ſinus anguli, quem curua in A cum axe AP conſtituit $= \mu$, eiusque coſinus $= \sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$ et altitudo celeritati in A debita $= b$. Facto ergo $s = 0$ et $ds : dx = 1 : \nu$, fieri debet $v = b$, habebitur ergo ex $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ haec $\nu^2 b = a$, vnde conſtans a cognoſcitur.

Corollarium 3.

877. Porro in aequatione curuae vltima facto $s = 0$ et $ds : dx = 1 : \nu$ et $ds : dy = 1 : \mu$, inuenietur conſtans $C = gc + \mu b + \nu^2 b l \frac{1+\mu}{\nu}$. Quare pro curua deſcripta haec orietur aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{\mu dx^2 - \nu^2 dyds}{dx^2} + \nu^2 l \frac{(1+\mu) dx}{\nu(dy+ds)}$. Ad celeritatem vero nueniendam inſeruit aequatio $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{\nu^2 b ds^2}{dx^2}$.

Corollarium 4.

878. Si fuerit D punctum ſupremum, erit ibi $dx = ds$ et $dy = 0$. Habebitur ergo $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \mu + \nu^2 l \frac{1+\mu}{\nu}$ ſeu $e^{\frac{s}{c}} = \frac{b\mu + gc + \nu^2 b l \frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Ex qua

 aequa-

aequatione reperitur arcus $AMD = cl\frac{b\mu + gc + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Altitudo vero debita celeritati quam corpus habebit in D erit $= \frac{\nu^2 gbc}{gc + b\mu + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{\nu}}$.

Corollarium 5.

879. Si in B curua eandem habere ponatur inclinationem ad axem AP quam habuit in A, erit $ds : dx : dy = 1 : \nu : -\mu$. Hinc ergo emerget iſta aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = 2\mu + \nu^2 l\frac{1+\mu}{1-\mu}$ ex qua prodit arcus $ADB = cl\frac{2\mu b + gc + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{1-\mu}}{gc}$.

Corollarium 6.

880. Conſtructio curuae etiam facilis deduci poteſt ex aequatione $dsddy = cd^3y$. Namque ponatur $dy = pdx$, erit $dpdx\sqrt{(1+pp)} = cddp$. Porro fiat $dx = \frac{dp}{q}$, erit ob $ddx = 0$; $ddp = \frac{dpdq}{q}$, vnde prodibit iſta aequatio $dp\sqrt{(1+pp)} = cdq$, atque $q = \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}$. Sumta igitur abſciſſa $x = \int\frac{cdp}{\int dq\sqrt{(1+pp)}}$ erit $y = \int\frac{cpdp}{\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Hisque reſpondebit $v = -\frac{cg(1+pp)}{2\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde cognoscitur pro p accipiendam eſſe quantitatem negatiuam.

Corollarium 7.

Tabula XI. Fig. 5.

881. Si corpus in A proiiciatur ſecundum directionem ipſius AP, et potentia tendat deorſum,

tota

tota curua A M a corpore deſcripta cadet infra AP, fietque y ſeu PM negatiua; atque cum ſit $\mu = o$ et $\nu = 1$, habebitur pro curua AM iſta aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{dyds}{dx^2} - l\frac{dx}{ds+dy}$ (877).

Corollarium 8.

882. Data igitur tangentis in quocunque puncto M inclinatione ad rectam AP ſeu ratione inter ds, dy et dx, inueniri poteſt ex hac aequatione longitudo arcus AM.

Scholion.

883. Experimenta docuere aerem corporibus reſiſtere in duplicata celeritatum ratione. Cum igitur vis grauitatis ſit vniformis et aer in non nimis altis diſtantiis eandem fere denſitatem ſeruet, caſus corporum in aere proiectorum apprime ad hanc propoſitionem refertur. Determinauimus igitur veram curuam, quam globi ex ſcloperis vel tormentis vel alio modo proiecti deſcribunt. Sumitur vulgo pro hac curua parabola, quippe quae in vacuo eſt proiectoria, et aer tam ſubtile fluidum eſſe creditur, vt eius reſiſtentia in computum duci non mereatur. Inſenſibilis quidem vtique eſt reſiſtentia aeris, ſi corpus magnum parua celeritate proiiciatur. Sed longiſſime a parabola aberrabit proiectoria, ſi exiguum corpus magna vi proiiciatur. His autem in caſibus, tametſi hic vera aſſignata eſt proiectoria, maxime dolendum eſt, aequationem tam

eſſe intricatum, vt vix quicquam ad vſum practicum ex ea poſſit deduci. *Neutonus* in Phil. hoc problema non attigit, neque poſt eum quisquam tentauit, donec *Keilius* ad hoc problema *Ioh. Bernoulli* prouocauerit, etſi ipſe ſolutionem exhibere non potuerit. Dedit autem ſolutionem non ſolum *Ioh. Bernoullius* in Act. Lipſ. 1719 m. Mai, ſed eodem fere tempore *Iac. Hermannus* Phoronomiae ſuae inſeruit. Sequens autem problema, in quo reſiſtentia ipſis celeritatibus proportionalis ponitur, tum a *Neutono* in Princ. tum a *Hugenio* in tract. de cauſa grauitatis, eſt ſolutum.

PROPOSITIO 108.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4. 884. *Si medii reſiſtentia fuerit vt ipſa corporis celeritas et potentiae directio* MP; *praetereaque tam potentia ſit vniformis quam medium reſiſtens: determinare curuam, quam corpus proiectum deſcribit, atque celeritatem in ſingulis locis.*

Solutio.

Poſitis vt in praecedente Prop. potentia vniformi $=g$, exponente medii reſiſtentis $=c$, altitudine celeritati in M debita $=v$; AP$=x$, PM$=y$ et arcu AM$=s$; erit ex vi normali vt ante $gds^2+2vddy=o$, ſumto dx pro conſtante. Ex vi tangentiali vero ob reſiſtentiam hoc caſu $=\frac{\surd v}{\surd c}$ habebitur iſta aequatio $dv=-gdy-\frac{ds\surd v}{\surd c}$. Ex his aequationibus con-

coniunctis per §. 872 vbi fit $q = c$ et $m = \frac{1}{2}$ obtinetur $Vv = -\frac{ds}{2ax}\int \frac{dx}{\sqrt{c}} - \frac{ds\sqrt{a}}{2dx} - \frac{xds}{2dx\sqrt{c}} = \frac{ds(\sqrt{ac}-x)}{2dx\sqrt{c}}$, eritque ergo $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Vnde pro curua deſcripta prouenit iſta aequatio $2gcdx^2 = -ddy(\sqrt{ac}-x)^2$ ſeu $-\frac{ddy}{dx} = \frac{2gcdx}{(\sqrt{ac}-x)^2}$ cuius integralis eſt $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$. Atque iterum integrando $y = kx - 2gcl\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}-x}$. Vnde ſimul conſtabit v, ex aequatione $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

885. Pro curua deſcripta ſtatim haec aequatio differentialis tertii gradus prodiiſſet, ſi ex aequatione $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$, eiusque differentiali $dv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$ valores in aequatione $dv = -gdy - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ fuiſſent ſubſtituti. Prouenisſet enim $d^3y\sqrt{gc} = -ddy\sqrt{-2ddy}$.

Corollarium 2.

886. Si corpus in A proiiciatur celeritate altitudini b debita, et ſinus anguli, quem tangens in A cum AP conſtituit ſit $= \mu$ eius coſinus $\sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$, erit in puncto A, $b = \frac{a}{4\nu^2}$ ſeu $a = 4\nu^2 b$, ex quo conſtans indefinita a determinatur.

Corollarium 3.

887. Aequatio porro $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$ ad punctum A translata dabit $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{2g\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + k$

 $= -$

$= -\frac{g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} + k$ ob $a = 4\nu^2 b$. Hinc inuenietur indifinita quantitas $k = \frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}}$.

Corollarium 4.

888. Pro curua igitur deſcripta inuenietur iſta aequatio differentialis $dy = \frac{2\mu\nu b dx\sqrt{c} - \mu x dx\sqrt{b} - gx dx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$ $= \frac{\mu dx}{\nu} - \frac{gx dx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$. Ex qua deducitur $\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2 cx^2}{\nu^2(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2}$. Quare cum ſit $v = \frac{ds^2(2\nu\sqrt{bc} - x)^2}{4c dx^2}$. Reperietur tandem $v = \frac{2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2 cx^2}{4\nu^2 bc}$.

Corollarium 5.

889. Aequatio autem integralis pro curua quaeſita erit $y = \frac{\mu x\sqrt{b} + gx\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} - 2gc\,l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$. Ex qua conſtructio curuae per logarithmicam facile perficitur.

Corollarium 6.

890. Tempus etiam, quo arcus AM abſoluitur facile definitur. Nam cum ſit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$ erit tempus per arcum $AM = 2\sqrt{c}\,l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$.

Corollarium 7.

891. Apparet etiam ex aequatione pro curua AM eam habere aſſymtoton: Nam cum x non poſſit eſſe maior quam $2\nu\sqrt{bc}$; ſi capiatur $AE = 2\nu\sqrt{bc}$ erit applicata in $E = -\infty$ ideoque aſſymtotos curuae AMDB. Intelligitur hoc etiam ex tempore

re quod ſit infinitum antequam corpus ad perpendicularem per E ductam peruenit.

Corollarium 8.

892. Punctum ſummum D reperietur ſi fiat $dy = o$. Tum autem inuenitur $x = \frac{2\mu\nu b\surd c}{\mu\surd b + g\surd c} = AC$. Deinde cum ſit in D $ds = dx$ et $2\nu\surd bc - x = \frac{2\nu gc\surd b}{\mu\surd b + g\surd c}$ erit altitudo debita celeritati in puncto $D = \frac{\nu^2 g^2 bc}{(\mu\surd b + g\surd c)^2}$ et ipſa celeritas in $D = \frac{\nu g\surd bc}{\mu\surd b + g\surd c}$.

Corollarium 9.

893. Applicata vero CD ſeu diſtantia puncti D ab axe AP erit $= 2\mu\surd bc - 2gc\, l\frac{\mu\surd b + g\surd c}{g\surd c}$ et tempus quo corpus ex A in D peruenit erit $= 2\surd c\, l\frac{\mu\surd b + g\surd c}{\surd gc}$.

Scholion.

894. Reduci igitur poteſt caſus, quo corpus ex A oblique proiicitur ad caſum, quo ad directionem potentiae normaliter ex D proiicitur. Cognita enim celeritate, qua corpus in A proiicitur, et directione inueniri poterit punctum D in quo tangens ipſi AC eſt parallela, et celeritas corporis in D. Quare ad meliorem huius motus cognitionem expedit motum tanquam in D incipientem conſiderari, quem in finem ſequentem propoſitionem adiecimus.

PRO-

PROPOSITIO 109.
Problema.

Tabula XI. Fig. 5. 895. *Si corpus vbique aequaliter deorſum attrahatur, atque in* A *ſecundum directionem horizontalem* AP *data velocitate proiiciatur in medio vniformi, quod in ſimplici celeritatum ratione reſiſtat: determinare curuam* AM, *quam corpus deſcribet et motum corporis in hac curua.*

Solutio.

Cum propoſitio haec ſit caſus ſpecialis praecedentis, maneant omnes denominationes vt ante. Fiet autem y ſeu applicata PM negatiua, quia curua AM infra AP cadet, atque erit $\mu = o$ et $\nu = 1$. Exiſtente ergo g potentia ſollicitante, c exponente reſiſtentiae, b altitudine celeritati in A debita, v altitudine coleritati in M debita, et AP $= x$ et AM $= s$; habebitur aequatio pro curua AM haec differentialis $dy = \frac{gxdx\sqrt{c}}{2b\sqrt{c} - x\sqrt{b}}$ (888), atque haec integralis $y = \frac{gx\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2gcl\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (889). Porro erit $v = \frac{(2b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 + g^2cx^2}{4bc}$ (888). Atque tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\, l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (890). Quae aequationes tam curuam AM quam motum in hac curua determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

896. Si $l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ in ſeriem conuertatur prodibit $\frac{x}{2\sqrt{bc}} + \frac{x^2}{2.4bc} + \frac{x^3}{3.8bc\sqrt{bc}} + \frac{x^4}{4.16b^2c^2} +$ etc. Quamobrem

obrem erit $y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12b\sqrt{bc}} + \frac{gx^4}{32b^2c} +$ etc. et tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{x^2}{4b\sqrt{c}} + \frac{x^3}{12bc\sqrt{b}} + \frac{x^4}{32b^2c\sqrt{c}} +$ etc.

Corollarium 2.

897. In vacuo igitur quando c ſit infinite magnum erit $y = \frac{gx^2}{4b}$; quo igitur caſu curua AM abit in parabolam, cuius parameter eſt $\frac{4b}{g}$, et tempus quo arcus AM abſoluitur eſt $= \frac{x}{\sqrt{b}}$, atque $v = b + \frac{g^2x^2}{4b} = b + gy$, quemadmodum ex Prop. 72. colligere licet.

Corollarium 3.

898. Sumta $AE = 2\sqrt{bc}$ erit verticalis EF curuae AM aſſymtotos. Quare ſi ex M in EF demittatur perpendiculum MQ, erit $MQ = PE = 2\sqrt{bc} - x$, et $EQ = y$. Ponatur $MQ = z$, erit $y = -2cg + \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 1gcl\frac{2\sqrt{bc}}{z}$, et tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\,l\frac{2\sqrt{bc}}{z}$.

Corollarium 4.

899. Punctum igitur E per quod tranſit aſymtotos EF tantum diſtat a puncto A, quousque corpus ex A ſi nulla adeſſet potentia ſollicitans g, poſſet pertingere, antequam motum omnem amitteret. Atque ſimili modo patet tempus per AM aequale eſſe tempori per AP potentia g euanescente.

Ddd

te. Intelligitur hoc ex eo, quod g in his expreſſionibus non ineſt.

Corollarium 5.

900. Ducatur ex M tangens MT, erit $QT = -\frac{zdy}{z} = 2gc - \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Per M ducatur MR conſtituens cum EF angulum, cuius tangens eſt $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$. Quo facto erit $QR = \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$; ideoque $RT = 2gc$.

Corollarium 6.

901. Si igitur MT conſideretur vt applicata curuae AM ad axem EF obliquangula; erit curua AM ob ſubtangentem RT conſtantem logarithmica obliquangula ſubtangentis $= 2gc$, et tangens anguli inclinationis applicatarum MR ad aſymtoton $EF = \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$.

Scholion.

902. Proiectoriam in hac reſiſtentiae et vis ſollicitantis hypotheſi non ſolum ope logarithmicae conſtrui poſſe, ſed ipſam eſſe logarithmicam obliquangulam obſeruauit *Ioh. Bernoulli* in Actis Lipſ. 1719. Cuius ſolutio cum hac noſtra egregie conuenit.

PROPOSITIO 110.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4. 903. *Poſita potentiae abſolutae vniformis directione MP verticali et medio, quod etiam vniforme*

me ponitur, reſiſtente in quacunque multiplicata celeritatum ratione: determinare curuam AM, quam corpus proiectum deſcribit.

Solutio.

Manente $AP = x$; $PM = y$, $Mm = ds$, celeritate in $M = \sqrt{v}$, potentia $= g$, exponente medii reſiſtentis $= c$, reſiſtat medium in ratione $2m$ *cuplicata* celeritatum; eritque $R = \frac{v^m}{c^m}$, et $P = g$ (870). Quare habebuntur iſtae aequationes $gds^2 = -2vddy$ et $dv = -g\,dy - \frac{v^m\,ds}{c^m}$, ex quibus tum curua AM tum motus corporis in curua determinatur. Aequatio autem $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$ dat $dv = -g\,dy + \frac{gds^2d^3y}{2aay^2}$, et $v^m = \frac{g^m ds^{2m}}{2^m(-ddy)^m}$. Hinc eliminata v peruenitur ad iſtam aequationem $c^m d^3y = -\frac{g^{m-1}}{2^{m-1}} \frac{ds^{2m-1}}{(-ddy)^{m-2}}$ pro curuae natura. Ad hanc conſtruendam ponatur $dy = pdx$, eritque $ddy = dxdp$, $d^3y = dx\,ddp$ et $ds = dx \sqrt{(1+p^2)}$. Quibus ſubſtitutis habebitur $2^{m-1}c^m(-dp)^{m-2}ddp = -g^{m-1}dx^m(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ponatur porro $dx = \frac{dp}{q}$, eritque $ddp = \frac{d\,pdq}{q}$. Vnde habebitur $2(-2)^{m-2}c^m q^{m-1}dq = -g^{m-1}dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$, et inte-

grando $q^m = -\frac{mg^{m-1}}{2(-2)^{m-2}c^m}\int dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ex qua aequatione datur q in p, quo inuento ſumta abſciſſa $x=\int\frac{dp}{q}$, eſt reſpondens applicata $y=\int\frac{pdp}{q}$. Atque celeritati debita altitudo $v=-\frac{g(1+pp)}{2q}$; et tempus quo arcus AM abſoluitur i. e. $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\int\frac{dp\sqrt{2}}{\sqrt{-gq}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

904. Perſpicuum eſt quoties $2m$ fuerit vel numerus affirmatiuus impar vel numerus negatiuus par valorem ipſius q algebraice per p poſſe exhiberi.

Corollarium 2.

905. Si reſiſtentia eſt conſtans ſeu $m=0$, et corpus initio in A proiectum ſit celeritate $\sqrt{b}$ ſecundum horizontalem AP, erit applicata PM, y negatiua, ideoque habebuntur hae aequationes $gds^2 = 2vddy$ et $dv=gdy-ds$ ſeu $v=b+gy-s$. Vnde prodibit haec aequatio $\frac{gds^2}{2ddy}=b+gy-s$.

Corollarium 3.

906. Commodius autem hic caſus tractabitur, ſi in aequatione differentiali tertii gradus ponatur $m=0$ prodit enim $gd^3y=-\frac{2ddy^2}{ds}$ ſeu ſubſtitutionibus per p et q factis haec $\frac{gdq}{q}=-\frac{2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, cuius integralis eſt $glq=2l\frac{\sqrt{(1+pp)}-p}{a}$, ſeu obſeruata homoge-

geneitate $aq=(\sqrt{(1+p^2)}-p)^{\frac{2}{g}}=\frac{adp}{dx}$. Hinc habebitur $dx=\frac{adp}{(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2}{g}}}$. Quae denuo integrata dat $2x=\frac{ga}{(2+g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+g}{g}}}+\frac{ga}{(2-g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-g}{g}}}+k$. Hincque reperitur $y=\int p\,dx$ et abſoluta integratione $4y=\frac{ga}{(2+2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+2g}{g}}}-\frac{ga}{(2-2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-2g}{g}}}+i$. Patet igitur hanc curuam fore algebraicam niſi ſit g vel 1 vel 2.

Scholion.

907. Aeque late patet *Ioh. Bernullii* ſolutio proiectoriarum in medio reſiſtente quam dedit in Act Lipſ. A. 1719 Mai. ac haec noſtra ſolutio vbi etiam conſtructionem generalem pro his curuis dedit. Antequam autem hanc potentiae vniformis hypotheſin relinquamus, problemata inuerſa ſoluemus, quibus determinabimus reſiſtentiam, quae efficit vt corpus in hac potentiae vniformis et deorſum tendentis hypotheſi datam curuam deſcribat. Haec enim materia tum a *Neutono* in Phil. tum a *Ioh. Bernoullio* in Act. Lipſ. A. 1713 pluribus eſt pertractata; vbi Viri acutisſimi multa eximia notauerunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Tabula XI. Fig. 6.

908. *Poſita potentia abſoluta* g *uniformi et deorſum tendente, determinare reſiſtentiam in ſingulis locis* M, *qua fiat, vt corpus datam curuam* BAM *deſcribat.*

Solutio.

Ponatur vt ante $AP = QM = x$, $PM = AQ = y$, et elementum arcus $AM = ds$. Deinde ſit celeritas in $M = \sqrt{v}$ et reſiſtentia in $M = R$. His igitur comparatis cum Prop. 106. fiet $P = g$, et y negatiue debet accipi; eritqne $gds^2 = 2vddy$, ſumto dx conſtante (871) et $dv = gdy - Rds$ (870). Ex illa aequatione autem eſt $v = \frac{gds^2}{2ddy}$ ideoque $dv = gdy - \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Coniunctis igitur his aequationibus prodibit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$. Quare cum curua ſit data, ex eius aequatione reperietur finitus valor ipſius R, ideoque innoteſcit reſiſtentia Q. E. I.

Corollarium I.

909. Erit igitur vis reſiſtentiae in M ad vim ſollicitantem g vt dsd^3y ad $2ddy^2$. Seu poſito radio oſculi in $M = r$, ob $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ erit $\frac{dsd^3y}{2ddy^2} = \frac{3dsdy - dxdr}{2ds^2}$. Quare erit $g : R = 2ds^2 : 3dsdy - dxdr$.

Corollarium 2.

910. Altitudo generans celeritatem in M nempe v ex ipſa curua determinatur eſt enim

$v =$

$v = \frac{g ds^2}{2ddy}$. Seu introducto radio osculi r ob $\frac{ds^2}{ddy} = \frac{rdx}{ds}$ erit $v = \frac{grdx}{2ds}$.

Corollarium 3.

911. Si reſiſtentia ponatur in duplicata celeritatum ratione, exponens vero reſiſtentiae ſumatur incognitus q erit $R = \frac{v}{q} = \frac{g ds^2}{2qddy}$. Cum igitur inuentum ſit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$; inuenietur medii reſiſtentis exponens $q = \frac{dsddy}{d^3y}$. Similique modo pro aliis medii reſiſtentis hypotheſibus inueniri poteſt medii reſiſtentis exponens.

Corollarium 4.

912. Introducto ad q determinandum radio osculi r, erit $\frac{d^3y}{ddy} = \frac{ddy(3dsdy - dxdr)}{ds^3} = \frac{3dsdy - dxdr}{rdx}$. Conſequenter fiet $q = \frac{rdxds}{3dsdy - dxdr}$. Cognito igitur radio osculi r tam R quam q per differentialia primi gradus determinabuntur.

Corollarium 5.

913. Si curua AM fuerit parabola, cuius axis eſt verticalis AC, quia in ea eſt $d^3y = 0$, prodibit quoque reſiſtentia $R = 0$. Ex quo cognoscitur parabolam in vacuo deſcribi poſſe a corpore vniformiter deorſum tracto, quemadmodum cuique ſatis conſtat.

Co-

Corollarium 6.

914. Si curua fuerit parabola quaecunque ſuperioris ordinis ita vt ſit $a^{n-1}y = x^n$, erit $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{a^{n-1}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^{2n-2} + n^2x^{2n-2})}}{a^{n-1}}$. Porroque ob dx conſtans $ddy = \frac{n(n-1)x^{n-2}dx^2}{a^{n-1}}$ et $d^3y = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3}{a^{n-1}}$. Quare fiet $R = \frac{(n-2)g\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{3n(n-1)x^{n-1}}$. Atque poſita reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens reſiſtentiae $q = \frac{x\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{(n-2)a^{n-1}}$.

Scholion.

915. Alia exempla curuarum, quae loco A M aſſumi poſſunt hic non adiungo; ſed iis ſequentes propoſitiones deſtino, cum diligentius examinari mereantur. Conſiderabo autem praecipue circulum et hyperbolam cum hae curuae a Viris citatis maxime ſint tractatae.

PROPOSITIO 112.
Problema.

Tabula XI. Fig. 6. 616. *Poſita vi abſoluta g uniformi et perpetuo deorſum trahente; inuenire reſiſtentiam, quae faciat*

ciat vt corpus libere in peripheria circuli BAMD *moueatur.*

Solutio.

Sit radius circuli AC$=a$, erit $x^2=2ay-y^2$, et radius osculi in M$=a=$MC. Quare ob $dr=0$ erit g:R$=2ds:3dy$. Eſt vero $ds:dy=a:x=$AC:QM. Hanc ob rem erit g:R$=$2AC:3QM ſeu R$=\frac{3g.QM}{2AC}$. Altituto vero generans celeritatem in M erit $=\frac{gadx}{2ds}=\frac{g.QC}{2}$. At ſi reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis ponatur erit exponens reſiſtentiae $q=\frac{adx}{3dy}=\frac{a.QC}{3QM}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

917. Dum corpus per arcum BA ascendit ob QM tum exiſtentem negatiuam, erit quoque reſiſtentia per BA negatiua; ſeu motus corporis per CA a medio accelerabitur vi tangentiali $\frac{3g.QM}{2AC}$.

Corollarium 2.

918. Reſiſtentia vero in puncto A, quia QM euanescit, erit nulla; corpus igitur in A tanquam in vacuo mouebitur. In puncto vero D reſiſtentia erit ad potentiam g in ſesqui altera ratione. In B vero tantundem ſurſum a reſiſtentia ſollicitabitur.

Corollarium 3.

919. Cum igitur in B et D directio vis reſiſtentiae cum directione potentiae g conueniat; Corpus in B ſurſum vrgebitur vi $\frac{1}{2}g$; in A deorſum trahetur a vi g, et in D ſurſum iterum a vi $\frac{1}{2}g$.

Corollarium 4.

920. Quia $\frac{QM}{AC}$ exprimit ſinum anguli ACM poſito radio $=1$, erit reſiſtentia in $M = \frac{3}{2}g$ ſin. ACM, ſeu reſiſtentia vbique eſt vt ſinus anguli ACM, quo corpus ab A declinauit.

Corollarium 5.

921. Porro eſt $\frac{a.QC}{QM}$ tangens arcus MD. Quare poſita reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens reſiſtentiae q aequalis tertiae parti cotangentis arcus AM.

Corollarium 6.

922. Cum altitudo debita celeritati in M ſit $= \frac{g.QC}{2}$; erit celeritas in $A = \sqrt{\frac{g.AC}{2}}$; in B vero et D erit celeritas $=0$. Quia igitur corpus in B reuera ſurſum pellitur vi $= \frac{g}{2}$, mirum non eſt corpus in B ſurſum moueri incipere.

Corollarium 7.

923. Corpus igitur tam in quadrante BA quam AD in locis aeque diſſitis a puncto A aequales ha-

habebit celeritates. Infra vero horizontalem BD corpus peruenire non poteſt ob QC negatiuam, quo caſu celeritas fit imaginaria.

Scholion.

924. Quorſum autem corpus, cum in D peruenerit, ſit progreſſurum, facile ex allatis colligi poteſt. Nam cum celeritas in D ſit $=o$ et corpus in D ſurſum vrgeatur vi $\frac{1}{2}g$, perſpicuum eſt corpus iterum ſurſum moueri debere. Eodem autem modo iterum per arcum DMA ascendet, quo initio per BA acsendit, quia tam in D quam in B vi $=\frac{1}{2}g$ ſurſum vrgetur. Hoc vero mirabile in hoc motu occurrit, quod corpus in B quiescens ſurſum pellatur et nihilominus in curua moueatur, etiamſi nulla vis adeſſe videatur, quae corporis directionem quam in E ſurſum accepit, poſſet inflectere. Sed ad hoc reſpondeo vis in B directionem non perfecte ſurſum tendere, ſed infinite parum a vera verticali aberrare, id quod ſufficit ad motum obliquum producendum. Directio enim vis reſiſtentiae in B ſeu potius vis accelerantis eſt elementum peripheriae circuli in B inſiſtens, quod non perfecte eſt recta verticalis, ſed infinite parum inclinata ad BC. Ceterum haec noſtra egregie conueniunt cum iis quae Cel. *Bernoulli* dedit in Act. Lipſ. A. 1713 et quae ſunt in *Neutoni* Princ. Phil. poſterioribus editionibus. In prima enim editione error in ſolutio-

nem irrepſit, quo inductus fuit, vt rationem g ad R ſtatueret aequalem rationi AC ad QM. Monitus autem de hoc a *Bernoullio* in ſequentibus editionibus hunc lapſum emendauit.

PROPOSITIO 113.

Problema.

Tabula XII. Fig. 1. 925. *Poſita vt ante vi abſoluta* g *vniformi et deorſum trahente; inuenire vim reſiſtentiae, qua efficitur vt corpus in hyperbola* NAM *axem* CAQ *verticalem habente libere moueri poſſit.*

Solutio.

Sit C centrum hyperbolae et ſemiaxis transuerſus $AC = a$, ſemiaxis vero coniugatus ſit $= c$. Ponatur $CQ = t$ et $QM = AP = x$; eritque ex natura hyperbolae $c^2t^2 = a^2x^2 + a^2c^2$. Sumta autem $PM = AQ = y$ erit $y = t - a$, et $dy = dt$, $d^2y = d^2t$ atque $d^3y = d^3t$. Ex aequatione vero habebitur $t = \frac{a\sqrt{(x^2+c^2)}}{c}$ et $dt = \frac{axdx}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Porro fiet $ddt = ddy = \frac{acdx^2}{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $d^3t = d^3y = -\frac{3acxdx^3}{(x^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus erit $\frac{d^3y}{ddy} = -\frac{3xdx}{x^2+c^2}$ et $\frac{d^3y}{ddy^2} = -\frac{3x\sqrt{(x^2+c^2)}}{acdx}$. Conſequenter pro-

proueniet reſiſtentia $R = -\frac{3gx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{2ac^2}$ atque $v = \frac{g(c^4+c^2x^2+a^2x^2)\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac^3}$. Reſiſtentia vero quadratis celeritatum proportionali poſita erit exponens reſiſtentiae $q = -\frac{\sqrt{(x^2+c^2)}(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}{3cx}$. Q. E. I.

Corollarium I.

926. Ducta tangente MT erit $QT = \frac{ax^2}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ et $MT = \frac{x\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Conſequenter prodibit $R = -\frac{3g.MT.\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac} = -\frac{3g.CQ.MT}{2a^2}$ ſeu $R : g = -3.CQ.MT : 2.AC^2$.

Corollarium 2.

927. Quia reſiſtentia R inuenitur negatiua, indicio id eſt deſcenſum per AM in hyperbola fieri non poſſe in medio reſiſtente, ſed requiri vt corpus a medio promoueatur. At dum corpus per arcum NA aſcendit, quia fit ds negatiuum, reſiſtentia R erit affirmatiua. Hanc ob rem ſi corpus eſt in N, erit reſiſtentia $R = \frac{2g.CQ.NT}{2AC^2}$.

Corollarium 3.

928. Ex natura hyperbolae eſt $CQ : AC = AC : CT$. Itaque erit reſiſtentia in N ſeu $R = \frac{3g.NT}{2CT}$. Vel erit reſiſtentia R ad potentiam abſolutam g vt 3 NT ad 2 CT. In vertice ergo A reſiſtentia euaneſcit, creſcitque quo magis N ab A diſtat.

Corollarium 4.

929. Altitudo debita celeritati corporis in M vel N, eſt $=\frac{g.CQ^2.MT^2}{2.AC^2.QT}$ vti ex valore ipſius v et natura hyperbolae facile deducitur. Cum autem ſit MT=NT et CQ. NT=$\frac{2R.AC^2}{3g}$, erit $v=\frac{2R^2.AC^2}{9g.QT}$.

Corollarium 5.

930. Si reſiſtentia ponatur celeritatibus proportionalis et exponens reſiſtentiae ſit q, erit $R=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ et $v=R^2q$. Quare inuenietur $q=\frac{2AC^2}{9g.QT}$. Hac igitur hypotheſi exponens erit reciproce vt ſubtangens QT.

Corollarium 6.

931. At ſi reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis ſitque exponens reſiſtentiae q erit exiſtente corpore in N hic exponens $q=\frac{NT.CQ}{3.TQ}$. Seu ducta ex C parallela CR tangenti NT occurrens applicatae QM productae in R erit $q=\frac{CR}{3}$.

Scholion.

932. Quod ante in circulo et nunc in hyperbola obſeruauimus reſiſtentiam in altero arcu fieri affirmatiuam in altero negatiuam, id in omnibus curuis circa ſupremum punctum A duos arcus ſimiles et aequales vt AN et AM habentibus locum obti-

tinet. Nam cum generaliter pro arcu AM ſit reſiſtentia $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, quia in arcu AN ſit ds negatiuum erit in N reſiſtentia $R = -\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, ita vt reſiſtentia in N ſit negatiuum reſiſtentiae in M. Quare cum in rerum natura non detur reſiſtentia negatiua, qua motus corporis acceleratur, fieri non poteſt, vt corpus in medio reſiſtente curuam deſcribat, quae circa ſummum punctum A habeat duos ramos ſimiles et aequales. Altitudo vero generans celeritatem tam in M quam in N eſt eadem, eius enim valor $\frac{gds^2}{2ddy}$ non mutatur, etiamſi ds fiat negatiuum. Cum igitur iſtius modi curuae a *Neutono* ideo ſint conſideratae, vt aliquam erueret, pro qua medii reſiſtentis denſitas non multum variaret; ſeu noſtro tractandi modo in qua exponens reſiſtentiae vbique fere ſit eiusdem valoris; quo talem curuam pro proiectoria in medio reſiſtenti vniformi habere poſſet ſine ſenſibili errore: alias curuas non diametro verticali praeditas cum *Neutono* conſiderabimus, cuius modi ſunt hyperbolae aſſymtoton verticalem habentes, quippe quae propius accedunt ad logarithmicam, quae a corpore in medio reſiſtente in ſimplici celeritatum ratione eoque vniformi deſcribitur. In alia enim reſiſtentiae hypotheſi *Neutonus* proiectorias non determinauit, ſed contentus fuit veris proximas aſſignare. Quod inſtitutum, cum verae proiectoriae a nobis datae tam ſint implicatae, vt vix quicquam ex iis ad praxin poſſit deduci, etiam ſequemur.

PRO-

PROPOSITIO 114.

Problema.

Tabul. XII. Fig. 2. 933. *Sit curua* NM *hyperbola cuiuscunque gradus alteram habens aſymtoton* CP *verticalem, determinare reſiſtentiam, quae efficiat vt corpus perpetuo vi* g *deorſum ſollicitatum in hac hyperbola poſſit moueri.*

Solutio.

Conſideretur aſymtotos CP tanquam axis, ad eumque ex M normalis ducatur MP. Poſita CP $= y$ et MP $= x$, quae ſupra generaliter tradidimus haec locum habebunt, ſi modo ibi dx ſumatur negatiuum. Sit RC altera aſſymtotos et C centrum hyperbolae; ſinus ang. RCP $= \alpha$, eiusque coſinus $\sqrt{(1-\alpha^2)} = \beta$. Erit ergo producta PM in R, PR $= \frac{\alpha y}{\beta}$ et CR $= \frac{y}{\beta}$. Ex M ducatur MQ parallela aſymtoto CR, erit MQ $= \frac{x}{\alpha}$ et PQ $= \frac{\beta x}{\alpha}$; ideoque CQ $= \frac{\alpha y - \beta x}{\alpha}$. At ex natura hyperbolarum erit $a^n = \frac{x^{n-1}(\alpha y - \beta x)}{\alpha^n}$, atque hinc $y = \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\alpha^{n-1} a^n}{x^{n-1}}$ et $dy = \frac{\beta dx}{\alpha} - \frac{(n-1)\alpha^{n-1} a^n dx}{x^n}$. Ducta tangente MT erit PT $= -\frac{xdy}{dx} = -\frac{\beta x}{\alpha} + \frac{(n-1)\alpha^{n-1} a^n}{x^{n-1}}$, MT $= \frac{xds}{dx}$, ita vt ſit $ds = \frac{MT.dx}{x}$. Hoc vero caſu quo x in altera parte ſumitur fit MT ne-

negatiua. Porro ob dx conſtans erit $d^2 y = \frac{n(n-1)\alpha^{n-1} a^n dx^2}{x^{n+1}}$ et $d^3 y = -\frac{(n+1)(n-1)n\alpha^{n-1} a^n dx^3}{x^{n+2}}$

Ex his oritur $\frac{g\,ds\,d^3 y}{2\,ddy^2} = -\frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ qui valor facto MT negatiuo aequatur reſiſtentiae R. Erit itaque $R = \frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ (908). atque altitudo debita celeritati in M ſeu $v = \frac{g x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$. Si medium reſiſtere ponatur in ratione $2m$ *cuplicata* ratione celeritatum et exponens reſiſtentiae ſit q, erit $R = \frac{v^m}{q^m}$ ideoque $q = \frac{v}{R^{\frac{1}{m}}}$

Ex quo fiet $q = \frac{g^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}} MT^{\frac{2m-1}{m}}}{2^{\frac{m-1}{m}} (n^2-n)^{\frac{m-1}{m}} (n+1)^{\frac{1}{m}} \alpha^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}} a^{\frac{n(m-1)}{m}}}$

ſeu $q^m = \frac{g^{m-1} x^{(m-1)(n-1)} MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)\alpha^{(m-1)(n-1)} a^{n(m-1)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

934. Quia eſt $x^{n-1} = \frac{\alpha^n a^n}{\alpha y - \beta x}$, erit reſiſtentia $R = \frac{g(n+1)\alpha.\,MT}{2n(n-1)(\alpha y - \beta x)} = \frac{g(n+1)MT}{2n(n-1)CQ}$. Vnde erit reſiſtentia R ad potentiam g vt $(n+1)$ MT ad

 2 n(n

$2n(n-1)CQ$. Simili modo hoc loco x^{n-1} valore ſubſtituto erit $v = \frac{g.MT^2}{2n(n-1)CQ}$ et $q^m =$
$\frac{g^{m-1} MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)CQ^{m-1}}$.

Corollarium 2.

935. Deſcendente corpore in infinitum fiet $x=0$, et $MT=PT=\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, euaneſcente x. In profunditate ergo infinita erit $R=\frac{g(n+1)}{2n}$, ideoque finitae magnitudinis, at erit $v =$ $\frac{g(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{2nx^{n-1}}$. Quare cum neceſſario ſit $n > 1$, euaneſcente x fiet corporis celeritas infinitae magna.

Corollarium 3.

936. Poſita igitur reſiſtentia $R=\frac{v^m}{q^m}$, in profunditate infinita, debebit etiam q eſſe infinite magna; his itaque locis corpus in vacuo mouebitur. Ex quo ſequitur quo magis corpus deſcendat eo minorem fore reſiſtentiam, ſeu potius medium eo rarius.

Corollarium 4.

937 In hyperbola appolloniana ſit $n = 2$. Pro hac igitur curua inuenitur $R = \frac{3gx.MT}{4\alpha a^2}$ =

$= \frac{3g.MT}{4.CQ}$, et $v = \frac{g.MT^2}{4.CQ}$, atque $q^m = \frac{g^{m-1}.MT^{2m-1}}{3.2^{2m-2}.CQ^{m-1}}$.

Corollarium 5.

938. Si reſiſtentia ponatur celeritatibus proportionalis, erit in omnibus his hyperbolis exponens reſiſtentiae directe vt CQ, ob $m = \frac{1}{2}$ hoc caſu. Hac igitur reſiſtentiae hypotheſi corpus omnes hyperbolas poterit libere deſcribere.

Corollarium 6.

939. Si reſiſtentia ponatur in duplicata celeritatum ratione vt ſit $m = 1$, erit exponens reſiſtentiae in $M = \frac{MT}{n+1}$. Quo magis igitur MT variatur, eo magis quoque medium erit difforme.

Corollarium 7.

940. Tempus praeterea quo elementum Mm deſcribitur ſeu $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$. Tempus igitur, quo corpus in M vsque peruenit, eſt vt $\int \frac{dx}{x^{\frac{n+1}{2}}}$ i. e. vt $C - \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}$, ſeu potius vt $\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} - C$. Quare tempus, quo corpus ex N in M peruenit, erit vt $\frac{1}{MP^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{NP^{\frac{n-1}{2}}}$.

Corollarium 8.

950. In parabola igitur appolloniana in qua $n=2$ erit tempus, quo corpus ab N ad M peruenit vt $\sqrt{NP}-\sqrt{MP}$ ob NP.MP conſtans nempe $=\frac{\alpha a^2}{\varepsilon}$.

Scholion.

951. Ex his manifeſtum eſt corpus in medio reſiſtente vniformi huiusmodi hyperbolas deſcribere non poſſe, cum exponens reſiſtentiae nimium ſit variabilis, quippe qui tandem ſit infinite magnus. Quamobrem *Neutoni* inſtitutum, quo has hyperbolas loco verarum proiectoriarum in medio reſiſtente vniformi ſubſtituere voluit probari non poteſt. In medio enim ſecundum quadrata celeritatum reſiſtente, exponens eſt vt tangens MT, quae tam descendendo, quam ad punctum N regrediendo vehementer variatur. Intelligi etiam haec inconuenientia poteſt ex celeritate, quae descendendo in infinitum crescit, cum tamen in medio vniformi non vltra datum terminum crescere queat. Praeterea non ſatis liquet in reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis hypotheſi curuam deſcriptam habere aſymtoton verticalem, quemadmodum in medio reſiſtente in ſimplici ratione celeritatum. Nam hac reſiſtentia etiam, ſi corpus a nulla potentia vrgetur, totius motus linea eſt finita; quae vero ſi reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis ponitur, fit infinita. Ex quo etiam con-

conſequi videtur proiectoriam in hac reſiſtentia non eſſe habituram aſymtoton. Hoc ſaltem certum eſt non habere hanc curuam aſymtoton hyperbolicam. Interim tamen habet aſymtoton verticalem alius generis, quae ex quadratura curuae, per rectificationem parabolae datae, determinatur. Sed relicta potentiae vniformis hypotheſi, pergamus ad potentiam variabilem, cuius tamen directio vbique ſibi ſit parallela. Ex datis quidem potentia et reſiſtentia curuam deſcriptam non inueſtigabimus cum hoc Prop. 106 iam ſit factum; ſed data curua atque vel potentia vel reſiſtentia vel celeritate reliqua determinabimus.

PROPOSITIO 115.

Problema.

953. *Sit potentia abſoluta vtcunque variabilis et vbique deorſum tendens iuxta* MP, *determinare reſiſtentiam requiſitam ad hoc, vt corpus in data curua* AM *moueatur.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Sit AP $=x$, PM $=y$ et elementum arcus AM $=ds$: tum ſit vis qua corpus in M ſecundum MP ſollicitatur $=$P, et altitudo celeritati in M debita $=v$, atque reſiſtentia in M $=$R. His poſitis erit $dv=-Pdy-Rds$ (870), et $v=-\frac{Pds^2}{2ddy}$ (871), ſum-

 to

to dx conſtante. Ex hac ergo aequatione erit $dv = -Pdy - \frac{dPds^2}{2ddy} + \frac{Pds^2d^3y}{2ddy^2}$; vnde prodibit $R = \frac{dPds}{2ddy} - \frac{Pdsd^3y}{2ddy^2}$ ſeu $\frac{2R}{ds} = d.\frac{P}{ddy}$. Inueniuntur ergo tam v quam R per datas quantitates P, x et y expreſſa. Q. E. I.

Corollarium I.

953. Poſito radio oſculi in $M = r$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$, et $d^3y = -\frac{3dsdyddy}{rdx} + \frac{ds^3dr}{r^2dx} = \frac{3ds^4dy}{r^2dx^2} + \frac{ds^3dr}{r^2dx}$. Vnde prodit $v = \frac{Prdx}{2ds}$ et $R = -\frac{rdPdx - Pdxdr - 3Pdsdy}{2ds^2}$.

Corollarium 2.

954. Si lex reſiſtentiae ſit celeritatum ratio duplicata et exponens $= q$ erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$. Quocirca reperietur $q = \frac{Pdsddy}{Pd^3y - dPddy}$, ſeu $q = -\frac{Prdxds}{rdPdx + Pdxdr + 3Pdsdy}$.

Corollarium 3.

955. Sit vis P ad grauitatem 1 vt y ad f erit $P = \frac{y}{f}$, ideoque $R = -\frac{rdxdy - ydxdr - 3ydsdy}{2fds^2}$ et $v = \frac{yrdx}{2fds}$, atque $q = -\frac{yrdxds}{rdydx + ydxdr + 3ydsdy}$.

Corollarium 4.

956. Si curua A M fuerit circulus radii $AC = a$, erit $r = a$, $dr = 0$, $dy = \frac{(a-x)dx}{y}$ et

$ds =$

$ds = \frac{adx}{y}$. Vnde prodit $v = \frac{Py}{2}$, et reſiſtentia $R = -\frac{ydP}{2adx} - \frac{3P(a-x)}{2a}$, atque $q = -\frac{aPydx}{y^2dP + 3P(a-x)dx}$.

Exemplum 1.

957. Sit curua AM circulus cuius centrum C et radius $AC = a$. Corpus autem perpetuo ad axem AC attrahatur in ratione diſtantiarum ita vt ſit $P = \frac{y}{f}$; erit $v = \frac{y^2}{2f}$, ideoque celeritas in M erit ut applicata MP. Deinde reſiſtentia R fiet $= -\frac{y(a-x) - 3y(a-x)}{2af} = -\frac{2y(a-x)}{af} = -\frac{2\,PM.CP}{f.AC}$ et $q = -\frac{PM.AC}{4.CP}$. Celeritas autem in puncto A erit $= o$, et reſiſtentia, dum corpus in quadrante ascendit negatiua, ſeu corpus a medio accelerabitur. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit infinite magnum, fit enim $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{adx\sqrt{2f}}{2ax - x^2} = -V\frac{f}{2}\,l\,o + V\frac{f}{2}\,l\,\frac{x}{2a-x}$. Id quod etiam per ſe intelligitur, nam cum celeritas in A ſit $= o$, et hic tam vis ſollicitans $\frac{y}{f}$, quam vis medii euanescat, corpus perpetuo in A debebit perſeuerare.

Exemplum 2.

958. Manente curua AM circulo, ſi vis abſoluta fuerit reciproce vt diſtantia PM ſeu $P = \frac{f}{y}$; erit $v = \frac{f}{2}$. Quare celeritas corporis vbique erit eadem, ſeu corpus feretur motu aequabili per circuli peripheriam et tempus, quo arcus quiuis AM abſoluitur erit vt ipſe arcus AM. At reſiſtentia in M erit $= -\frac{f(a-x)}{ay} = -\frac{f.CP}{AC.PM}$. Reſiſtentia igitur dum corpus

pus per quadrantem aſcendit erit negatiua; dum autem per ſequentem quadranten deſcendit, reſiſtentia fiet affirmatiua ſeu erit vera reſiſtentia. Ex reſiſtentia porro inuenitur $q = -\frac{AC.PM}{2.CP}$. In puncto igitur A reſiſtentiae vis promouens erit infinite magna; vt et potentia ſollicitans, quae reſiſtentiae eſt aequalis.

Exemplum 3.

959. Manente AM circulo ſit vis ſollicitans vt poteſtas quaecunque diſtantiae MP, ſeu $P = \frac{y^n}{f^n}$; erit $dP = \frac{ny^{n-2}(a-x)dx}{f^n}$. Ex his igitur prodibit $v = \frac{y^{n+1}}{2f^n}$ et reſiſtentia $R = -\frac{(n+3)y^n(a-x)}{2af^n}$ Vnde fit $R:P = -(n+3)CP:2AC$. Quare ſi fuerit $n = -3$, ſeu potentia P reciproce vt cubus diſtantiae MP, euaneſcet reſiſtentia R, corpusque ab hac potentia ſollicitatum in vacuo moueri poterit in circulo AM. Deinde ſi $n+3$ eſt numerus affirmatiuus reſiſtentia per quadrantem aſcenſus erit negatiua. At ſi $n+3$ eſt numerus negatiuus reſiſtentia per hunc quadrantem fit affirmatiua.

Exemplum 4.

Tabula XII. Fig. 4. 960. Si curua AMB fuerit talis, vt radius oſculi in M ſit reciproce, vt applicata PM, id quod omnes

omnes curuas elaſticas competit erit $r=\frac{a^2}{y}$ et $dr = -\frac{a^2dy}{y^2}$. Fiet igitur $v=\frac{a^2Pdx}{2yds}$, et $R=\frac{a^2Pddxdy}{2y^2ds^2}-\frac{a^2dPdx}{2yds^2}-\frac{3Pdy}{2ds}$. Cum autem ſit $-\frac{ds^3}{dxddy}=\frac{a^2}{y}$, atque integrando $2a^2dx=ds(y^2+b^2)$, et $dy = \frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{y^2+b^2}$. Hinc erit $v=\frac{P(y^2+b^2)}{4y}$. Atque $R=\frac{P(b^2-5y^2)\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{8a^2y^2}-\frac{dP(y^2+b^2)^2}{8a^2ydx}$. Sit nunc $P=\frac{y}{f}$, et $dP=\frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{f(b^2+y^2)}$, erit $v=\frac{y^2+b^2}{4f}$ et $R=-\frac{3y\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{4a^2f}=-\frac{3ydy}{2fds}$. Ideoque $R:P=-3dy:2ds$. Quam diu igitur corpus aſcendit reſiſtentia eſt negatiua, at quando deſcendit erit affirmatiua.

PROPOSITIO 116.

Problema.

961. *Si data ſit curua AM et reſiſtentia per quantitates ad curuam pertinentes; inuenire potentiam abſolutam P perpetuo normaliter ad axem AC tendentem, quae faciat vt corpus in hac curuum libere moueri poſſit.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Sit $AP=x$, $PM=y$ et elementum curuae $=ds$. Deinde ſit reſiſtentia in $M=R$, quae ergo per x, y et s dabitur; potentia quaeſita ſit $=P$ et celeritas in M debita altitudini v. His poſitis erit; $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$ (871), et $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-Rds$ (cit.).

Ex hac aequatione ob dx conſtans reperitur integrando $v = \frac{ads^2}{dx^2} - \frac{ds^2}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Inuenta autem v innoteſcet P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

962. Erit igitur $P = -\frac{2addy}{dx^2} + \frac{2ddy}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Per meras igitur quantitates datas determinatur P.

Corollarium 2.

963. Quia conſtans addita a prolubitu poteſt accipi, ita ea poterit determinari, vt corpus in puncto A vel alio quodam dato puncto datam habeat celeritatem.

Corollarium 3.

964. Si reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae q erit $q = \frac{ads^2}{Rdx^2} - \frac{ds^2}{Rdx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$.

Corollarium 4.

965. Tempus quo arcus A M percurritur eſt $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$, in qua expreſſione ſi valor ipſius v ſubſtituatur proueniet tempus per $AM = \int\frac{dx}{\sqrt{(a - \int\frac{Rdx^2}{ds})}}$

Co-

Corollarium 5.

966. Si reſiſtentia ponatur ad vim grauitatis 1 vt tangens in M ad ſubtangentem ſeu vt ds ad dx, erit $v = \frac{ds^2}{dx^2}(a-x)$ et $P = -\frac{2ddy}{dx^2}(a-x)$ atque tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(a-x)}$. At porro erit $q = \frac{ds}{dx}(a-x)$.

Exemplum.

967. Sit curua circulus cuius radius $AC = b$, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)}$ et $dy = \frac{dx(b-x)}{y}$ et $ds = \frac{bdx}{y}$, atque $ddy = -\frac{b^2 dx^2}{y^3}$. Ex his habebitur $v = \frac{b^2}{y^2}(a - \int \frac{Rydx}{b})$ atque $P = \frac{2b^2}{y^3}(a - \int \frac{Rydx}{b}$. Ponatur reſiſtentia $= \frac{ds}{dx}$ ſeu $R = \frac{b}{y}$, erit $v = \frac{b^2}{y^2}(a-x)$, et $P = \frac{2b^2}{y^3}(a-x)$, atque $q = \frac{b}{y}(a-x)$. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit $= 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(c-x)}$. Si vlterius ſit $b = a$, erit $v = \frac{AC^2 . PC}{PM^2}$, et $P = \frac{2AC^2 PC}{PM^3}$, et $R = \frac{AC}{PM}$. Celeritas igitur corporis in ſupremo circuli puncto erit $= o$, et potentia P ibidem euanescit. Corpus autem vltra hoc punctum non poterit progredi, quia alias celeritas fieret imaginaria, inde igitur reuertetur ad punctum A, quia a reſiſtentia quae in receſſu fit negatiua acceleratur. Dum autem peruenerit in A, quia hic celeritas eſt infinite magna, hoc motu ſuo deſcribet quadrantem infra AC, in quo ob potentiam P negatiuam ſurſum vrgebitur.

PROPOSITIO 117.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

968. *Si medium fuerit vniforme atque reſiſtat in duplicata ratione celeritatum determinare potentiam abſolutam deorſum tendentem, quae faciat vt corpus in hoc medio reſiſtente deſcribat curuam datam* AM.

Solutio.

Poſita AP $=x$, PM $=y$, elemento arcus AM $=ds$, celeritate in M $=\sqrt{v}$, exponente medii reſiſtentis $=c$, et potentia abſoluta $=$ P, erit igitur $R=\frac{v}{c}$. His poſitis erit $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$ et $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-\frac{vds}{c}$ (871). Quare habebitur $\frac{dv}{v}=\frac{2dyddy}{ds^2}-\frac{ds}{c}$ et integrando $lv=l\frac{ads^2}{dx^2}-\frac{s}{c}$ ſeu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Valore igitur ipſius v inuento erit $P=-\frac{2ae^{-\frac{s}{c}}ddy}{dx^2}$. Data ergo curua tum v tum P inueniuntur. Q. E. I.

Corollarium 1.

969. Tempus quo corpus arcum AM abſoluit ſeu $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $=\int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$. Data ergo curua ſeu

aequatione inter s et x, habebitur quoque tempus ſaltem per quadraturas. Eae igitur curuae ad hoc ſunt commodisſimae, pro quibus datur aequatio inter s et x.

Corollarium 2.

970. Quia a pro lubitu poteſt accipi, vtpote quantitas integratione adiecta, eius determinatione effici poteſt, vt vel celeritas in dato curuae loco ſit data, vel potentia ſollicitans.

Corollarium 3.

971. Si curua AM verſus axem AP eſt concaua, tum eſt ddy negatiuum, his igitur caſibus potentia corpus ad axem AP trahet. At ſi curua erit conuexa verſus AP, quia tum ddy fit affirmatiuum, potentia P fit negatiua, ſeu corpus ab axe AP repelletur.

Exemplum 1.

972. Sit curua AM parabola axem habens normaliter inſiſtentem rectae AP, qualis in vacuo a corpore ex A oblique proiecto deſcribitur, erit $by = fx - x^2$, ideoque $dy = \frac{fdx}{b} - \frac{2xdx}{b}$ atque $ddy = -\frac{2dx^2}{b}$. His ſubſtitutis erit potentia ſollicitans $P = \frac{4a}{be^{\frac{s}{c}}}$. Ex quo intelligitur quo diutius motus

continuetur, eo magis decreſcere potentiam P. Facto autem c infinite magno id quod fit in vacuo erit $c^{\frac{s}{c}}=1$ atque potentia $P=\frac{4a}{b}$ et idcirco conſtans.

Exemplum 2.

973. Sit curua AM talis vt eius aequatio ſit $y=\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3$, erit $dy=\alpha dx-2\beta x dx-3\gamma x^2 dx$ et $d^2y=-2\beta dx^2-6\gamma x dx^2$. Hinc erit $P=\frac{4\beta a+12\gamma a x}{e^{\frac{s}{c}}}$. In puncto A eſt $dy=\alpha dx$, et $\frac{ds^2}{dx^2}=1+\alpha^2$. Altitudo igitur debita celeritati initiali in A eſt $a(1+\alpha^2)$ quae ſi dicatur b erit $a=\frac{b}{1+\alpha^2}$ et α eſt tangens anguli ſub quo corpus ex A proiicitur. Deinde ex ipſius dy valore reperitur $ds=dx\sqrt{(1+\alpha^2-4\alpha\beta x+4\beta^2x^2-6\alpha\gamma x^2+12\beta\gamma x^3+9\gamma^2x^4)}=dx\sqrt{(1+\alpha^2)}-\frac{2\alpha\beta x dx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$ etc. Neglectis igitur reliquis terminis foret $s=x\sqrt{(1+\alpha^2)}-\frac{\alpha\beta x^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, atque $e^{\frac{s}{c}}=1+\frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}-\frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}}+\frac{x^2(1+\alpha^2)}{2c^2}$ etc. qui termini quoque reiici poſſunt ſi c fuerit valde magnum. Quare quo P fiat quam proxime conſtans nempe $=g$, debebit eſſe $4\beta a=g$, et $\frac{3\gamma}{\beta}=\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}$. Atque ſi aſſumta fuiſſet haec aequatio $y=\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3-\delta x^4$, prodiiſſet $\frac{6\delta}{\beta}=\frac{(1+\alpha^2)}{2c^2}-\frac{\alpha\beta}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Erit ergo $\beta=\frac{g(1+\alpha^2)}{4b}$, $\gamma=\frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc}$ et $\delta=\frac{g(1+\alpha^2)^2}{48bc^2}$

$-\alpha g$

$-\frac{\alpha g^2(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{96 b^2 c}$. Haec igitur curua quarti ordinis erit quam proxime proiectoria in medio valde raro vniformi, quod reſiſtit in duplicata celeritatum ratione, et potentia vniformi g deorſum tendente.

Corollarium 4.

974. Quia aeris reſiſtentia eſt quadratis celeritatum proportionalis, ſi in aere valde grauis globus atque magnus ingenti vi proiiciatur, tum b et c erunt quantitates maximae. Quare pro proiectoria huius corporis accipi poterit haec aequatio $y = \alpha x - \frac{g(1+\alpha^2)}{4b} x^2 - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc} x^3$, quae curua a vera proiectoria quam minime differet.

Corollarium 5.

975. Sit AMDB haec proiectoria; in qua vt inueniatur punctum B, quo corpus proiectum incidit in horizontalem AB pono $y=0$, eritque Tabula XII. Fig. 5.

$x^2 = -\frac{3cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$, hincque $x = -\frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \sqrt{\left(\frac{9c^2}{4(1+\alpha^2)} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}$. Erit

ita-

itaque $AB = \sqrt{\left(\frac{9c^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)} - \frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Innoteſcit igitur ex hac aequatione longitudo iactus ex data celeritate initiali, et inclinatione.

Corollarium 6.

976. Punctum iactus ſummum D reperietur faciendo $dy = 0$. Fiet autem $0 = \alpha - \frac{g(1+\alpha^2)}{2b}x - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4bc}x^2$ ſeu $x^2 = -\frac{2cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$ Atque ex hac aequatione $AC = \sqrt{\left(\frac{c^2}{1+\alpha^2} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)} - \frac{c}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$.

Corollarium 7.

977. Iactus longiſſimus, qui eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ producitur, prodibit ſi anguli inclinationis tangens α ex iſta aequatione determinatur $3\alpha c\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{8b(1+\alpha^2)}{g} + \frac{24\alpha^2 b}{g} = \alpha\sqrt{(9c^2(1+\alpha^2) + \frac{48\alpha bc\sqrt{(1+\alpha^2)}}{g})}$ ſeu hac $4b(1-2\alpha^2)^2 - 3\alpha gc(1-2\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)} = 3\alpha^3 gc\sqrt{(1+\alpha^2)}$ ſeu iſta ſimpliciore $4b(1-2\alpha^2)^2 = 3\alpha gc(1-\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)}$.

Co-

Corollarium 8.

978. Si ſinus anguli quem curua in A cum horizontali AC conſtituit, ſit $=\varepsilon$, poſito ſinu toto $=1$ erit $9\varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=\frac{3gc\varepsilon}{4b}(1-2\varepsilon^2)$. Ex qua aequatione valor ipſius ε erutus, dabit directionem pro iactu longiſſimo. Ex hac autem aequatione reperitur quam proxime $\varepsilon=\sqrt{\frac{5b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$.

Corollarium 9.

979. Angulus igitur, qui iactum longiſſimum producit, aliquantulum eſt minor quam ſemi rectus, qui in vacuo ſatis facit. Nam ſi eſſet $\varepsilon=\sqrt{\frac{6b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$ foret $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque angulus ſemirectus. At cum hic in numeratore habeamus tantum $5b$, parumper erit minor.

Corollarium 10.

980. Si corpus in A horizontaliter proiiciatur celeritate $\sqrt{a}$, fiet $\alpha=0$, atque y negatiua. Quamobrem poſitis $AP=x$ et $PM=y$, iſtius proiectoriae natura hac exprimetur aequatione $y=\frac{gx^2}{4b}+\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$. Pro curua autem AN in qua corpus aſcendit erit $y=\frac{gx^2}{4b}-\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$.

Corollarium 11.

981. Si adhuc plures termini quam quatuor accipiantur prodiret aequatio pro curua AM haec

$y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2} + \frac{gx^5}{240bc^3} +$ etc. qui termini cum ſeriem ſummabilem conſtituant, quam minime a vero aberrabitur, ſi y ponatur aequalis ſummae huius ſeriei. Erit autem $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}} - 1) - cgx$. Pro arcu vero aſcenſus AN erit $2by = cgx - c^2g(1 - e^{-\frac{x}{c}})$.

Corollarium 12.

982. Tempus quo arcus AM percurritur eſt $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$, cum ſit $g = \frac{2vddy}{ds^2}$. Eſt vero $2bdy = cge^{\frac{x}{c}}dx - cgex$ et $2bddy = ge^{\frac{x}{c}}dx^2$. Prodibit igitur $\int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}} = \int \frac{e^{\frac{x}{2c}}dx}{\sqrt{b}} = \frac{2c}{\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$. Atque ſi b et c in ſcrupulis pedis rhenani exprimuntur erit tempus per AM $= \frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$ minutis ſecundis (222).

Scholion.

983. Hac igitur ratione vero proxime determinauimus proiectoriam in aere a corporibus proiectis deſcriptam, quae non difficulter loco parabolae, quae vulgo adhiberi ſolet, poteſt ſubſtitui. Hanc quidem eandem aequationem deducere potuiſſemus ex vera aequatione $dsddy = cd^3y$ (875), harum proiectarum ſupra inuenta. Sed cum ibi haec

haec reductio eſſet omiſſa, hic eam afferre maluimus, praecipue quod hoc loco clarius appareat aequationis aſſumtae terminos poſteriores vehementer decreſcere. Denique ſimili quoque modo curuae cum proiectoriis in aliis medii reſiſtentis hypotheſibus proxime conuenientes poſſunt inueniri; ſed cum aliae hypotheſes in mundo locum non habeant iis inueniendis hic non immorabimur.

PROPOSITIO 118.

Problema.

684. *Inuenire tam reſiſtentiam in ſingulis locis* M, *quam potentiam abſolutam deorſum ſecundum* MP *tendentem, quae faciant vt corpus in data curua* AM *et data cum celeritate in ſingulis punctis* M *moueri poſſit.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Poſitis vt ante $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$ et altitudine celeritati in M debita $= v$, quae igitur omnia dantur. Deinde ſit potentia corpus in M deorſum trahens $= P$ et reſiſtentia $= R$. His poſitis ſtatim reperitur P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ (871). At reſiſtentia R inuenietur ex aequatione $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - R\,ds$ (cit.). Quare erit $R = \frac{2vdyddy}{ds^3} - \frac{dv}{ds}$. Si reſiſtentiae lex ponatur duplicata celeritatum ratio, eiusque exponens $= q$;

erit

erit $R = \frac{v}{q}$, ex quo prodibit $q = \frac{v\,ds^3}{2v\,dy\,ddy - dv\,ds^2}$ ſumto dx pro conſtante. Q. E. I.

Corollarium 1.

985. Quia dx eſt conſtans erit $dyddy = dsdds$. Hanc ob rem erit $R = \frac{2vdds}{ds^2} - \frac{dv}{ds}$, ſeu $R = ds\,d. - \frac{v}{ds^2}$. Atque hinc erit $q = \frac{v\,ds^2}{2vdds - dvds}$ ſeu $q = \frac{v}{ds\,d. - \frac{v}{ds^2}}$.

Corollarium 2.

986. Si corpus debet motu vniformi per curuam AM ferri ita vt ſit $v = b$, proueniet $P = -\frac{2bddy}{ds^2}$ et $R = \frac{2bdyddy}{ds^3} = \frac{2bdds}{ds^2}$, atque $q = \frac{ds^2}{2dds}$.

Corollarium 3.

987. In motu igitur vniformi, dum corpus in curua AM aſcendit, reſiſtentia R ſemper eſt negatiua ſeu motum corporis accelerat. At quando corpus iterum deſcendit, medium reuera reſiſtet.

Corollarium 4.

988. Poſito radio oſculi in $M = r$, quia eſt $r = -\frac{ds^3}{dxddy}$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$. Hanc ob rem habebitur $P = \frac{2vds}{rdx}$ et $R = -\frac{2vdy}{rdx} - \frac{dv}{ds}$, atque $q = -\frac{rvdxds}{2vdyds + rdxdv}$.

Co-

Corollarium 5.

989. Poſito iterum $v=b$ et $dv=o$, erit $P=\frac{2bds}{rdx}$ et $R=-\frac{2bdy}{rdx}$, atque $q=-\frac{rdx}{2dy}$. In ſupremo igitur puncto quo fit $dy=o$ et $ds=dy$ erit $P=\frac{2b}{r}$ atque reſiſtentia ibi euaneſcit, niſi forte curuatura ibi ſit infinite magna ſeu $r=o$.

Exemplum.

990. Sit curua AM circulus cuius centrum in C, qui motu aequabili ſeu celeritate $\sqrt{b}$ debeat deſcribi. Poſito eius radio $AC=a$, erit $dy=\frac{dx(a-x)}{y}$, $ds=\frac{adx}{y}$ et $r=a$. Ex quibus inuenitur potentia abſoluta deorſum tendens $P=\frac{2b}{y}$, ſeu erit reciproce vt diſtantia PM. Reſiſtentia vero erit $=-\frac{2b(a-x)}{ay}$. Dum igitur corpus aſcendit reſiſtentia erit negatiua atque reciproce proportionalis tangenti arcus AM. Ac ſi reſiſtentia ſit quadratis celeritatum proportionalis, erit eius exponens $q=-\frac{ay}{2(a-x)}=-\frac{AC.PM}{2PC}$. Eſt itaque q negatiua atque aequalis dimidiae tangenti arcus AM. Quando autem corpus verſus horizontem AC accedit, fiet tum reſiſtentia R tum q affirmatiua, ſeu medium reuera reſiſtet.

PROPOSITIO 119.

Problema.

991. *Si medium ſit vniforme atque reſiſtat in quacunque multiplicata celeritatum ratione: detur-* Tabula XIII Fig. 1.

que praeterea motus corporis progreſſiuus ſecundum horizontalem AP; *inuenire potentiam deorſum tendentem et curuam quam corpus deſcribet.*

Solutio.

Poſita CP$=x$, PM$=y$, arcu AM$=s$, ſit celeritas horizontalis corporis, dum eſt in M, debita altitudini u, erit verae celeritatis in M altitudo debita $=\frac{u\,ds^2}{dx^2}=v$. Sit porro exponens medii reſiſtentis $=c$ et lex ratio $2m$ *plicata* celeritatis, erit reſiſtentia $R=\frac{v^m}{c^m}=\frac{u^m ds^{2m}}{c^m dx^{2m}}$. His poſitis erit $P=\frac{2v\,ddy}{ds^2}=\frac{2u\,ddy}{dx^2}$ (871), pono enim ddy loco $-ddy$, quia in noſtro caſu y deorſum cadit. Deinde erit $dv=\frac{2v\,dy\,ddy}{ds^2}-R\,ds$ (cit.). At vero eſt $dv=\frac{du\,ds^2}{dx^2}+\frac{2u\,ds\,dds}{dx^2}$. Hinc ergo ob $ds\,dds=$ $=dy\,ddy$ habebitur $\frac{du\,ds}{dx^2}=-\frac{u^m ds^{2m+1}}{c^m dx^{2m}}$ ſeu $c^m d$ $x^{2m-2}du+u^m ds^{2m-1}=0$. Datur autem u in x; et hanc ob rem ds ex hac aequatione per x tantum poterit determinari; erit ſcilicet $ds=$ $\frac{c^{\frac{m}{2m-1}}\,dx^{\frac{2m-2}{2m-1}}\,(-du)^{\frac{1}{2m-1}}}{u^{\frac{m}{2m-1}}}$. Vnde inuenire licet aequationem pro curua inuenta. Hac vero inuenta ſimul innoteſcit P ex aequatione $P=\frac{2u\,ddy}{dx^2}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

992. Motus igitur horizontalis non poteſt eſſe vniformis, foret enim ob $du = o$, etiam $ds = o$; niſi in vacuo quo $c = \infty$, vbi ſemper et neceſſario eſt aequabilis. Multo minus quoque in medio reſiſtente motus horizontalis poterit eſſe acceleratus, tum enim ds vel negatiuum vel imaginarium obtineret valorem, quod vtrumque abſurdum. Motus ergo horizontalis debebit eſſe retardatus, quo fiat du negatiuum.

Corollarium 2.

993. Si reſiſtentia fuerit ipſis celeritatibus proportionalis, fiet $m = \frac{1}{2}$ et aequatio pro curua abit in $du\sqrt{c} + dx\sqrt{u} = o$. Quae autem, quia non continet s vel y, ad curuam pertinere non poteſt. Haec autem aequatio ipſum motum horizontalem determinat. Id quod indicio eſt in hac reſiſtentiae hypotheſi, non quemuis motum horizontalem pro lubitu accipi poſſe, ſed neceſſario eum eſſe accipiendum, qui hac aequatione determinatur.

Corollarium 3.

994. Iſte autem motus horizontalis congruit cum motu corporis horizontali in AP in eodem medio reſiſtente, ſed a nulla potentia ſollicitatum. Ex quo cognoſcitur, quaecunque fuerit potentia corpus ſollicitans, modo eius directio vbique de-

or-

orſum tendat, in medio reſiſtente in ſimplici celeritatum rationem motum horizontalem perpetuo eſſe eundem. Qua in re motus in hac reſiſtentiae hypotheſi ſimilis eſt motui in vacuo, in quo motus horizontalis ſemper eſt aequabilis, quantum cunque potentia deorſum tendens ſit variabilis.

Corollarium 4.

995. Aſſumto igitur hoc motus horizontalis valore, altera aequatio $P = \frac{2uddy}{dx^2}$ curuam deſcriptam determinabit, in qua pro P vero quamcunque quantitatem aſſumere licebit. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi, hoc problema generaliter eſt ſolutum: vt inueniatur curua, quam corpus vtcunque deorſum ſollicitatum deſcribit.

Corollarium 5.

996. Cum autem ſit $-\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} = dx$, erit $2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cu} = x$, poſita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$. Fiet ergo $2\sqrt{cu} = 2\sqrt{bc} - x$ et $u = \frac{(2\sqrt{bc} - x)^2}{4c}$. Pro curua ergo deſcripta haec habebitur aequatio $2cP\,dx^2 = ddy(2\sqrt{bc} - x)^2$.

Corollarium 6.

997. Hae igitur omnes curuae aſymtoton habebunt verticalem in diſtantia $2\sqrt{bc}$ a vertice A. Namque x maius eſſe nequit quam $2\sqrt{bc}$ et cum

cor-

corpus horizontaliter motum vltra hunc terminum progredi nequeat, etiam corpus in curua latum non vltra pertingere poterit.

Corollarium 7.

998. Si in aliis quoque reſiſtentiae hypotheſibus motus horizontalis in curua AM cum motu horizontali in recta AP in eadem reſiſtentiae hypotheſi congruens accipiatur, ita vt ponatur $du = -\frac{u^m dx}{c^m}$; prodibit pro curua AM haec aequatio $ds = dx$ et $P = o$. Illa igitur congruentia in aliis reſiſtentiae hypotheſibus nequidem locum habet.

Corollarium 8.

999. Sit igitur reſiſtentia vt quadratum celeritatis ſeu $m = 1$. Quare erit $ds = -\frac{cdu}{u}$, et integrando poſita b altitudine celeritati in A debita, $s = c\,l\,\frac{b}{u}$. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi erit arcus AM diuiſus per $2c$ aequalis differentiae logarithmorum celeritatum horizontalium in A et M.

Corollarium 9.

1000. In hac ergo reſiſtentiae hypotheſi erit $u = e^{-\frac{s}{c}} b$. Ex quo prodibit $P = \frac{2b\,ddy}{e^{\frac{s}{c}} dx^2}$.

 Seu

Seu cum ſit $ds = -\frac{c\,du}{u}$ erit $dds = -\frac{cuddu + cdu^2}{du^2} = \frac{dyddy}{ds}$. At eſt $dy = \frac{\surd(c^2du^2 - u^2dx^2)}{u}$. Vnde habebitur $ddy = \frac{c^2ududdu - c^2du^3}{u^2\surd(c^2du^2 - u^2dx^2)}$. Conſequenter erit $P = \frac{2c^2ududdu - 2c^2du^3}{udx^2\surd(c^2du^2 - u^2dx^2)}$.

Corollarium 10.

1001. Si aequatio inter u et x accipiatur iſta $du = -\frac{u^n dx}{f^n}$, ſeu $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b^{n-1}} = \frac{x}{f^n}$, erit $dx = -\frac{f^n du}{u^n}$ et $ddu = \frac{ndu^2}{u}$. His ſubſtitutis prodibit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione $P = \frac{2(n-1)c^2u^{3n-2}}{f^{2n}\surd(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}$. Pro curua autem quaeſita haec habebitur aequatio $dy = \frac{du\surd(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}{u^n}$.

Corollarium 11.

1002. Hoc igitur caſu u^{2n-2} maius eſſe debet quam $\frac{f^{2n}}{c^2}$ ſeu u maius quam $\frac{f^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}$. Quare ſi motus horizontalis fieri poteſt minor quam haec quantitas, motus in curua non toti motui horizontali dato reſpondebit. Nam ſi curua vlterius tenderet foret tam dy quam P imaginarium.

Co-

Corollarium 12.

1003. Ad inconueniens hoc euitandum debebit n minus eſſe vnitate, fiat ergo $n-1=-k$, ſeu $n=1-k$. Hoc poſito erit $u^k=b^k-f^{k-1}kx$. Exiſtente vero AP tangente curuae in A erit vbi $ds=dx$, ibi $u=b$. Hinc erit $b^{n-1}c=f^n$ ſeu $\frac{c}{b^k}=f^{1-k}$, ideoque $u^k=b^k(1-\frac{kx}{c})$. Porro autem fit $P=\frac{2kb^{3k}u^{1-2k}}{c\surd(b^{2k}-u^{2k})}$ et $dy=\frac{dx}{u^k}\surd(b^{2k}-u^{2k})=\frac{dx\surd(2kcx-k^2x^2)}{c-kx}$.

Scholion.

1004. Nulla igitur huiusmodi hypotheſis motus horizontalis in proiectoriam in fluido poteſt quadrare. Quicquid enim ſit k potentia in A vbi ſit $u=b$, eſt infinite magna; deinde vero perpetuo decreſcit. Hae curuae etiam omnes habent tangentem verticalem vbi eſt $x=\frac{c}{k}$, quae eſt aſymtotos curuae. Ceterum hoc problemate finem imponimus huic primae tractationi, qua directionem potentiae ſibi ſemper parallelam poſuimus; atque progredimur ad vires centripetas conſiderandas, examinaturi, quomodo medium reſiſtens motum corporum ad fixum punctum attractorum turbet.

PROPOSITIO 120.

Problema.

1005. *Attrahatur corpus in medio quocunque reſiſtente perpetuo ad punctum fixum* C *vi quacunque; determinare curuam* AM, *quam corpus vtcunque proiectum deſcribit.*

Solutio.

Cum corpus eſt in M ponatur eius diſtantia a centro $MC = y$, elementum $Mm = ds$; celeritas in M ſit debita altitudini v. Ducatur mC et ex M in eam normalis Mr, erit $mr = dy$. Porro ducta tangente MT, ſit ex C perpendiculum in eam demiſſum $CT = p$, et radius osculi in $M = r$, qui erit $= \frac{ydy}{dp}$. Iam ſit vis qua corpus in M ad C trahitur $= P$ et vis reſiſtentiae in $M = R$. Ex potentia autem P reſoluta prodit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$ et tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$, retardabit enim corporis motum. Ex vi autem normali habebitur haec aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ſeu $2vdp = Ppdy$ (552). Cum praeterea vis tangentialis reſiſtentia minuta ſit $-\frac{Pdy}{ds} - R$ erit $dv = -Pdy - Rds$ (cit.). Ex quibus aequationibus coniunctis tum celeritas corporis in ſingulis locis, tum ipſa curua AM cognoſcitur. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

1006. Ob ſimilia triangula Mmr, CMT erit $ds:dy = y:\sqrt{(y^2-p^2)}$ ideoque $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Quo ſubſtituto prodibit $dv = -Pdy - \frac{Rydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Eliminata igitur v obtinebitur aequatio inter y et p, quae ſufficit ad curuam determinandam.

Corollarium 2.

1007. Quia eſt $P = \frac{2vdp}{pdy}$; ſubſtituatur hic valor in altera aequatione. Quo facto prodibit $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds = -\frac{Rydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Ex qua aequatione ſi R fuerit potentia ipſius v poterit valor ipſius v inueniri.

Corollarium 3.

1008. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis et medium vniforme, ita vt ſit $R = \frac{v}{c}$. Hinc igitur erit $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{vds}{c}$, quae aequatio integrata dat $vp^2 = bh^2 e^{-\frac{s}{c}}$, vbi b eſt altitudo debita celeritati in initio A, et h eſt perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum.

Corollarium 4.

1009. Cum igitur in hac reſiſtentiae hypotheſi ſit $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}} p^2}$, erit vis $P = \frac{2bh^2dp}{e^{\frac{s}{c}} p^3 dy}$. Quando igitur P in y datur, haec aequatio erit aequatio

quaeſita pro curua AM, celeritas autem in quouis loco M eſt reciproce vt perpendiculum in tangentem et vt numerus cuius logarithmus eſt via deſcripta per $2c$ diuiſa coniunctim.

Corollarium 5.

1010. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi corpus eandem curuam deſcribet ſollicitatum a vi centripeta $\frac{V}{e^{\frac{s}{c}}}$, quam deſcribit in vacuo ſollicitatum a vi V. In vtroque enim caſu aequatio pro curua quaeſita erit haec $Vdy = \frac{2bb^2dp}{p^3}$. Quare quo corpus in hoc medio reſiſtente eandem quam in vacuo curuam deſcribat, vis centripeta perpetuo debet decreſcere in ratione, cuius logarithmus eſt ſpatium deſcriptum ad c applicatum.

Corollarium 6.

1011. Sit reſiſtentia poteſtati exponentis $2m$ celeritatum proportionalis et medium vniforme ita vt ſit $R = \frac{v^m}{c^m}$. Erit igitur $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{c^m}$. Quae integrata dat $v^{1-m} = \frac{(m-1)p^{2m-2}}{c^m}\int\frac{ds}{p^{2m-2}}$.

Co-

Corollarium 7.

1012. Sit reſiſtentia celeritatibus proportionalis ſeu $m = \frac{1}{2}$, erit $Vv = -\frac{1}{2p\sqrt{c}}\int p\,ds$. Exprimit autem $\int p\,ds$ duplam aream ACM, quae nobis ſit S. Et detracta conſtante erit $Vv = \frac{C - 2S}{2p\sqrt{c}} = \frac{h\sqrt{bc} - S}{p\sqrt{c}}$. Habentibus b et h eosdem quos ante Coroll. 3. valores.

Corollarium 8.

1013. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi celeritas corporis euaneſcit, quando corpus ſectorem ſeu aream abſoluerit aequalem ipſi $h\sqrt{bc}$. Hoc igitur ſpatium tantum eſt, vt corpus nunquam poſſit aream ipſi aequalem abſcindere. Atque celeritas corporis in M eſt directe vt hoc ſpatium area iam abſoluta minutum et reciproce vt perpendiculum in tangentem.

Corollarium 9.

1014. In eadem reſiſtentiae hypotheſi eſt $v = \frac{(h\sqrt{bc} - S)^2}{cp^2}$. Vis igitur centripeta erit $= \frac{2(h\sqrt{bc} - S)^2 dp}{cp^3 dy} = P$. Deinde vero tempus, quo arcus AM abſoluitur eſt $= \int \frac{p\,ds\sqrt{c}}{h\sqrt{bc} - S} = \int \frac{2\,dS\sqrt{c}}{h\sqrt{bc} - S} = 2\sqrt{c}\, l\, \frac{h\sqrt{bc}}{h\sqrt{bc} - S}$. Tempore ergo infinito opus eſt, antequam corpus aream abſcindat $= h\sqrt{bc}$, ſeu antequam omnem motum amittat.

Scho-

Scholion.

1015. Hae igitur ſunt generales leges, quas corpus in medio reſiſtente a vi centripeta quacunque ſollicitatum obſeruat. Eas autem pro reſiſtentia ipſis celeritatibus et celeritatum quadratis proportionali fuſius deduxi, tum quia licuit, quod in aliis hypotheſibus fieri non potuiſſet, tum quia in ſequentibus has duas reſiſtentias, vt hactenus fecimus, potiſſimum ſumus conſideraturi. Nunc autem datas ſumemus vires centripetas vt quae ſint diſtantiarum poteſtatibus proportionales, et inueſtigabimus, quales differentias reſiſtentia curuis deſcriptis inducat. Deinde iuxta inſtitutum in praecedentibus adhibitum, curuam datam ponemus vna cum vel vi centripeta vel reſiſtentia vel celeritate atque in reliqua inquiremus.

PROPOSITIO 121.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2. 1016. *Si vis centripeta fuerit diſtantiarum poteſtati cuicunque a centro proportionalis, corpusque moueatur in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtat in duplicata celeritatum ratione: determinare curuam* A M *quam corpus deſcribet, et motum corporis in ea.*

Solutio.

Manentibus vt ante $AM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini v, erit

P=

$P = \frac{y^n}{f^n}$ et $R = \frac{v}{c}$. Hinc habebitur pro curua quaeſita haec aequatio $\frac{y^n}{f^n} = \frac{2bh^2dp}{e^{\frac{s}{c}}p^3dy}$ et $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}}p^2} = \frac{y^npdy}{2f^ndp}$. Ex illa autem aequatione non multum ad curuam cognoſcendam proficitur ob $e^{\frac{s}{c}}$ inuolutum; quare ſumtis logarithmis erit $\frac{s}{c} = l\,2bf^nh^2 + l\,dp - nly - 3\,lp - ldy$, atque $\frac{ds}{c} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$ ſumto dy conſtante. Quia vero eſt $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ erit $\frac{ydy}{c\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Quae eſt aequatio inter y et p pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1017. Quaenam proditura ſit aequatio, ſi vis centripeta fuerit vel diſtantiis vel reciproce quadratis diſtantiarum proportionalis, ex aequatione inuenta facile apparet, ſi modo 1 vel -2 loco n ſubſtituatur. Huiusmodi autem ſubſtitutiones omnes nihil iuuant ad aequationem generalem tractabiliorem efficiendam.

Corollarium 2.

1018. Si medium non poſitum fuiſſet vniforme ſed eius exponens variabilis q, loco $e^{\frac{s}{c}}$ pro-

diiſſet $e^{\int \frac{ds}{q}}$ (873). Atque pro curua deſcripta haec aequatio $\frac{ydy}{q\surd(y^2-p^2)} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Vbi ſi q diſtantiae y fiat proportionalis aequatio ad differentialem primi gradus poterit reduci.

Corollarium 3.

1019. Sit igitur exponens reſiſtentiae $q = \frac{y}{\alpha}$, atque curua deſcripta ſequente aequatione exprimetur $\frac{\alpha dy}{\surd(y^2-p^2)} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. In qua cum in ſingulis terminis dimenſionum numerus euaneſcat, reductio ad differentialem primi gradus locum habet.

Corollarium 4.

1020. Hoc autem modo reperietur aequatio differentialis primi gradus. Ponatur $y = e^{\int zdt}$ et $p = e^{\int zdt}t$; erit $dy = e^{\int zdt}zdt$, et $ddy = e^{\int zdt}(zddt + dzdt + z^2dt^2) = o$. Quare erit $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$. Porro erit $dp = e^{\int zdt}(dt + ztdt)$ et $ddp = e^{\int zdt}(ddt + ztddt + tdtdz + 2zdt^2 + z^2tdt^2) = e^{\int zdt}(-\frac{dzdt}{z} + zdt^2)$. Ex quibus reperietur $\frac{\alpha zdt}{\surd(1-t^2)} = -\frac{dz + z^2dt}{z + z^2t} - nzdt - \frac{3dt}{t} - 3zdt = \frac{tdz - 3zdt - (n+5)tz^2dt - (n+3)t^2z^3dt}{tz(1+tz)} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - (n+3)zdt$.

Corollarium 5.

1021. Si vis centripeta reciproce proportionalis ponatur cubis diſtantiarum, erit $n = -3$.

Cur-

Curua ergo deſcripta continebitur hac aequatione
$\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t}$.

Corollarium 6.

1022. Si vis centripeta fuerit reciproce proportionalis quadratis diſtantiarum erit $n = -2$. Atque curua deſcripta ſequente exprimetur aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - z\,dt$. Eodem modo ſi vis centripeta ipſis diſtantiis ſeu $n = 1$ poſita eſſet prodiiſſet $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - 4zdt$.

Corollarium 7.

1023. Omnes hae aequationes curuas in vacuo deſcriptas dabunt, ſi ponatur $\alpha = o$. Hoc enim caſu fit reſiſtentiae exponens infinite magnus atque ideo reſiſtentia infinite parua. Habebitur autem haec aequatio $\frac{tdz + zdt}{tz(1+tz)} + \frac{2dt}{t} + (n+3)zdt = o$.

Scholion.

1024. Quando igitur exponens medii reſiſtentis, quod in duplicata celeritatum ratione reſiſtere ponitur, proportionalis eſt diſtantiis a centro, aequatio pro curua deſcripta ad differentialem primi gradus reduci poteſt; id quod in aliis exponentis reſiſtentiae q hypotheſibus vix fieri poteſt. Intelligo autem tales ipſius q valores, qui a ſolis diſtantiis y pendent, quippe quae poſitio ſo-

la admitti poteſt ratione. Incongruum enim eſſet q per p i. e. per ipſam curuam, quae adhuc eſt incognita, dare. Interim tamen aequatio differentio-differentialis ſemper ad differentialem primi gradus poteſt reduci, quoties q fuerit functio vnius dimenſionis ipſarum y et p coniunctim. Sed cum hae aequationes, tametſi ſunt differentiales primi gradus, neque integrari neque ſeparari queant, nihil praeſtant vtilitatis. Hanc ob rem reſiſtentiam, quae celeritatibus ipſis eſt proportionalis, conſiderabimus cum vi centripeta cuicunque diſtantiarum poteſtati proportionali coniunctam.

PROPOSITIO 122.
Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1025. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ſimplici celeritatum ratione, moueatur corpus attractum ad centrum* C *vi poteſtati cuicunque diſtantiarum proportionali: determinare curuam* AM *quam corpus deſcribet.*

Solutio.

Poſitis $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini v, et exponente reſiſtentiae $= q$, ſit vis centripeta $= \frac{y^n}{f^n}$, et area $ACM = \frac{1}{2}\int p\, ds = S$. His praemiſſis erit $\sqrt{v} = \frac{h\sqrt{bc} - S}{p\sqrt{c}}$, et $\frac{y^n}{f^n}$ $=$

$= \frac{2(b\sqrt{bc}-S)^2 dp}{cp^3 dy}$ (1012 et 1014), vbi b eſt altitudo celeritati in A debita, et h perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum. Quo eliminetur S, aequationi inuentae haec induatur forma $b\sqrt{bc}-S = \frac{\sqrt{cp^3 y^n dy}}{\sqrt{2f^n dp}}$. Ex qua differentiando poſito dp conſtante oritur $-\frac{p'ds}{2} = -\frac{ypdy}{2\sqrt{(y^2-p^2)}}$

$$= \frac{cp^3 y^n ddy + 3cp^2 y^n dy dp + ncp^3 y^{n-1} dy^2}{2\sqrt{2f^n cp^3 y^n dy dp}}$$ ſeu $o =$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} + \frac{cpy^{\frac{n-2}{2}} ddy + 3cy^{\frac{n-2}{2}} dy dp + ncpy^{\frac{n-4}{2}} dy^2}{\sqrt{2f^n cp\, dy\, dp}}$$

Quae aequatio naturam curuae deſcriptae AM exprimit. Hac vero cognita ſtatim innoteſcit celeritas corporis ex area curuae et perdendiculo p. Q. E. I.

Corollarium I.

1026. Si loco dp aſſumtum fuiſſet elementum dy conſtans, prodiiſſet iſta aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} =$

$$\frac{cpy^{\frac{n-2}{2}} ddp - 3cy^{\frac{n-2}{2}} dp^2 - ncpy^{\frac{n-4}{2}} dy\, dp}{\sqrt{2f^n cp dy dp}}.$$ Ex quibus aequationibus autem, quia ad differentiales primi gradus reduci nequeunt, nihil poteſt concludi.

Corollarium 2.

1027. Reductio ſupra (1020) adhibita ſemper locum habet, ſi in aequatione differentio-diffe-

 ren-

rentiali indeterminatae p et y eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Hoc autem accidit ſi $n=1$, i. e. ſi vis centripeta fuerit ipſis diſtantiis a centro proportionalis. Erit tum enim pro curua quaeſita $\frac{ydp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{cpyddp - 3cydp^2 - cpdydp}{\sqrt{2fcypdydp}}$. Poſito dy conſt.

Corollarium 3.

1028. Hac igitur hypotheſi ponatur $y=e^{\int zdt}$ et $p=e^{\int zdt}t$; vnde fit $dy=e^{\int zdt}zdt$; $dp=e^{\int zdt}dt(1+zt)$ et $ddp=e^{\int zdt}dt(-\frac{dz}{z}+zdt)$. His ſubſtitutis habebitur $\frac{dt(1+tz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2ftz}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdz}{z} - 3dt - 6tzdt - 4t^2z^2dt. = -\frac{tdz-zdt}{z} - 2dt(1+tz)(1+2tz)$. Seu poſito $tz=u$ prodibit $\frac{dt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fu}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdu}{u} - 2dt(1+u)(1+2u)$.

Corollarium 4.

1029. Aequatio haec integrationem admittit ſi diuidatur per $tt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}$, prodibit enim

$$\frac{dt\sqrt{2f}}{tt\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{du}{tu(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}} - \frac{2dt(1+2u)}{tt\sqrt{(u+u^2)}}$$

Cuius integralis eſt $C - \frac{\sqrt{2f(1-tt)}}{t\sqrt{c}} = \frac{2(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$, ſeu $Ct - \frac{\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{2c}} = \frac{1+2u}{\sqrt{(u+u^2)}} = \frac{1+2tz}{\sqrt{(tz+t^2z^2)}}$.

Co-

Corollarium 5.

1030. Eſt vero vi ſubſtitutionum factarum $t = \frac{p}{y}$, $z = \frac{ydy}{ydp - pdy}$ et $u = \frac{pdy}{ydp - pdy}$ ac $1 + u = \frac{ydp}{ydp - pdy}$ Quamobrem pro curua quaeſita erit $\frac{Cp}{y} - \frac{\sqrt{f(y^2 - p^2)}}{y\sqrt{2c}} = \frac{ydp + pdy}{\sqrt{pydpdy}}$.

Corollarium 6.

1031. Quo autem differentialia fiant rationalia eſt $2u + 1 = \frac{Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{((Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c)}} = \frac{ydp + pdy}{ydp - pdy} = \frac{y^2dt + 2ytdy}{y^2dt}$ reſtituto $p = yt$. Habebitur ergo ſequens aequatio in qua indeterminatae y et t ſunt a ſe inuicem ſeparatae $\frac{Ctdt\sqrt{2c} - dt\sqrt{f(1-tt)}}{t\sqrt{((Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c)}} - \frac{dt}{t} = \frac{2dy}{y}$. Ex qua aequatione curua conſtrui poterit.

Scholion.

1032. Huic aequationi vlterius reducendae non immoror, etſi ſuſpicor eam denuo poſſe integrari. Hoc quidem certum ſi fuerit $C\sqrt{2b} = f$; quo caſu integrale tam fit compoſitum, vt huc transferre noluerim. Ex quo intelligi poteſt integrale generaliter ſumtum maxime fore perplexum, ita vt vix quicquam ad motum cognoſcendum inde deduci poſſet. Quamobrem his miſſis ad inuerſa problemata pergo.

PROPOSITIO 123.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2. 1033. *Si data fuerit curua* AM *quam corpus deſcribit et reſiſtentia in ſingulis locis* M, *determinare vim centripetam ad centrum* C *perpetuo directam, et celeritatem in ſingulis locis.*

Solutio.

Ponantur vt ante $CM = y$, $Mm = ds$, $CT = p$, altitudo debita celeritati in $M = v$, reſiſtentia $= R$, et vis centripeta $= P$. His poſitis habebitur iſta aequatio $dv + \frac{2v\,dp}{p} = -R\,ds$ (1007), ex qua cum curua AM et reſiſtentia R dentur, inuenietur v ex aequatione integrali $p^2v = -\int Rp^2\,ds$, nempe $v = -\frac{\int Rp^2 ds}{p^2}$. Inuenta autem v reperietur $P = \frac{2v\,dp}{p\,dy} = -\frac{2\,dp\int Rp^2 ds}{p^3dy}$ (1005). Q. E. I.

Corollarium 1.

1034. Si celeritas in initio A ponatur $\sqrt{b}$ et perpendiculum in tangentem in A ex C demiſſum $= h$, in caſu nullius reſiſtentiae ſeu in vacuo prodiiſſent hae aequationes $p^2v = bh^2$ et $P = \frac{2bh^2dp}{p^3dy}$.

Corollarium 2.

1035. In medio igitur reſiſtente ſi $\int Rp^2ds$ ita capiatur, vt euaneſcat, euaneſcente arcu AM, erit $v = \frac{bh^2 - \int Rp^2ds}{p^2}$, et $P = \frac{2\,dp(bh^2 - \int Rp^2ds)}{p^3dy}$.

Co-

Corollarium 3.

1036. Si corpus in vacuo moueretur in curua AM eadem celeritate initiali in A, et ſi dicatur celeritas, quam in M habiturum eſſet Vu, et vis centripeta in $M = V$, tum foret $u = \frac{bh^2}{p^2}$ et $V = \frac{2bh^2dp}{p^3dy}$. Quare erit $u : u - v = bh^2 : \int Rp^2 ds$ et $V : V - P = bh^2 : \int Rp^2 ds$.

Corollarium 4.

1037. Cum igitur hoc problema, quo curua AM et celeritas initialis in A datur, vis centripeta vero quaeritur, iam ſit ſolutum in cap. praec. ex eadem ſolutione ſimul hoc problema ſoluitur. Inuenta enim $\int Rp^2 ds$, ſtatim innoteſcit differentia virium centripetarum in vacuo et medio reſiſtente, atque ideo ipſa vis centripeta in medio reſiſtente.

Exemplum I.

1039. Si curua AM fuerit circulus radii a, centrum in C habens, et reſiſtentia vbique eadem ſeu $R =$ conſtanti λ; erit $y = p = a$ et $h = a$. Quare habebitur $\int Rp^2 ds = \lambda a^2 s$, ideoque $v = b - \lambda s$ et $P = \frac{2b - 2\lambda s}{a}$. Celeritas ergo perpetuo decreſcit, et prorſus euaneſcit deſcripto arcu $= \frac{b}{\lambda}$, quo loco etiam vis centripeta in nihilum abit. Eſt autem vis centripeta vbique vt quadratum celeritatis.

Tempus praeterea, quo arcus AM percurritur eſt $\frac{2\sqrt{b}-2\sqrt{(b-\lambda s)}}{\lambda}$, et tempus quo corpus ad quietem redigitur eſt $\frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$.

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 2.

1039. Sit curua AMC logarithmica ſpiralis, cuius centrum in C, et reſiſtentia ſit poteſtas quaecunque diſtantiae CM, nempe $R=\frac{y^n}{f^n}$. Erit ergo $p=\alpha y$ et poſito $\beta=\sqrt{(1-\alpha^2)}$, $ds=-\frac{dy}{\beta}$. Ponatur vero $AC=a$, erit $b=\alpha a$. Fiet igitur $\int R p^2 ds=\frac{\alpha^2 a^{n+3}-\alpha^2 y^{n+3}}{(n+3)\beta f^n}$, hincque $v=\frac{(n+3)\beta a^2 b f^n-a^{n+3}+y^{n+3}}{(n+3)\beta f^n y^2}$. Atque $P=\frac{2(n+3)\beta a^2 b f^n-2a^{n+3}+2y^{n+3}}{(n+3)\beta f^n y^3}$. In caſu vero quo $n=-3$, qui a logarithmis pendet eſt $\int R p^2 ds=\frac{\alpha^2 f^3}{\beta}\, l\frac{a}{y}$. Atque $v=\frac{\beta a^2 b-f^3 l\frac{a}{y}}{\beta y^2}$ et $P=\frac{2\beta a^2 b-2f^3 l\frac{a}{y}}{\beta y^3}$.

Corollarium 5.

1040. Si tanta corpori in A imprimatur celeritas initialis vt ſit $b=\frac{a^{n+1}}{(n+3)\beta f^n}$; erit etiam

vbi-

vbique $v = \frac{y^{n+1}}{(n+3)\,\mathfrak{G}f^n}$ et $P = \frac{2y^n}{(n+3)\,\mathfrak{G}y^n}$ Hoc igitur caſu vis centripeta P erit ad reſiſtentiam R vt 2 ad $(n+3)\mathfrak{G}$. i. e. in data ratione.

Corollarium 6.

1041. Eodem hoc caſu eſt $y = (n+3)^{\frac{1}{n+1}} \mathfrak{G}^{\frac{1}{n+1}} f^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{1}{n+1}}$ atque $\frac{y^n}{f^n} = \frac{(n+3)^{\frac{n}{n+1}} \mathfrak{G}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{n}{n+1}}}{f^{\frac{n}{n+1}}}$ $= R$. Reſiſtentia igitur erit in $\frac{2n}{n+1}$ *plicata* ratione celeritatum medio exiſtente vniformi, quippe cuius exponens eſt $\frac{f}{(n+3)\mathfrak{G}}$.

Corollarium 7.

1042. Si $n = 1$, erit reſiſtentia in ratione celeritatum, et medii exponens $\frac{f}{4\mathfrak{G}}$. In hoc igitur medio corpus ſpiralem logarithmicam deſcribere poterit, ſi vis centripeta fuerit diſtantiis proportionalis nempe $= \frac{y}{2\mathfrak{G}f}$ et ſi initio in A proiiciatur celeritate $\frac{a}{2\sqrt{\mathfrak{G}f}}$. In quocunque praeterea medio reſiſtente vniformi ſpiralis data poterit deſcribi a corpore, excepto caſu, quo reſiſtentia eſt quadratis celeritatum proportionalis.

Scholion.

1043. Qualis vis centripeta et qualis reſiſtentia requiratur ad id, vt corpus in ſpirali logarithmica moueatur, Viri iam ſaepius citati *Neutonus* et *Bernoullius* in Princip. Phil. et Act. Lipſ. 1713 expoſuere. In ſequentibus deinde exemplis plura hac de re afferemus.

PROPOSITIO 124.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 2. 1044. *Si reſiſtentia fuerit cuicunque celeritatum poteſtati proportionalis eiusque exponens in ſingulis locis detur: inuenire vim centripetam, quae faciat vt corpus in data curua* AM *moueatur.*

Solutio.

Manentibus vt ante $CM = y$, CT, p, Mm, ds, celeritate in $M = \sqrt{v}$, et exponente reſiſtentiae $= q$, ſit reſiſtentia $R = \frac{v^m}{q^m}$ et vis centripeta $= P$. His poſitis erit $P = \frac{2vdp}{pdy}$ (1005), et $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{q^m}$ (1007). Haec aequatio integrata dat $v^{1-m} = -\frac{(1-m)}{p^{2(1-m)}} \int \frac{p^{2(1-m)} ds}{q^m}$. Caſu vero

quo

quo $m = 1$ eſt $v = \frac{1}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$. Inuenta autem v ſimul innoteſcit P ex aequatione $P = \frac{2vdp}{p\,dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1045. Sit celeritas, qua corpus in A proiicitur, debita altitudini b, et perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum $= h$. Atque $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}$, ita ſumatur vt euaneſcat facto $s = 0$ ſeu M in A incidente; hocque integrale ponatur $= S$. Addita igitur conſtante erit $v^{1-m} = \frac{C+S}{p^{2(1-m)}}$. Fiat nunc $S = 0$, erit $p = h$ et $v = b$, ideoque $C = b^{1-m} h^{2(1-m)}$. Determinata ergo conſtante C habebitur $v^{1-m} = \frac{b^{1-m} h^{2(1-m)} + S}{p^{2(1-m)}}$.

Corollarium 2.

1046. In caſu $m = 1$, qui peculiarem integrationem requirit, ſi $\int \frac{ds}{q}$ ita ſumatur vt euaneſcat facto $s = 0$; erit $v = \frac{bh^2}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$, ideoque $P = \frac{2bh^2 dp}{e^{\int \frac{ds}{q}} p^3 dy}$. In vacuo prodiiſſet $P = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$

 Erit

Erit ergo vis centripeta in vacuo ad vim centripetam in hoc medio reſiſtente vt 1 ad $e^{-\int\frac{ds}{q}}$.

Corollarium 3.

1047. Denotante autem m quemcunque alium numerum praeter 1 eſt $v = \frac{(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}}{p^2}$.

Ex quo prodit $P = \frac{2(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}dp}{p^3 dy}$. In vacuo vero prodiiſſet vis centripeta $= \frac{2bh^2dp}{p^3dy}$, quae ſi dicatur $= V$ erit $V : P = bh^2 : (b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}$. Atque hinc $V^{1-m} : P^{1-m} - V^{1-m} = b^{1-m}h^{2(1-m)} : S$.

Corollarium 4.

1048. Quare ſi reperta fuerit vis centripeta, quae in vacuo datam curuam AM producit, ex ea ope huius analogiae inuenietur vis centripeta, quae idem in medio quocunque reſiſtente praeſtabit, ſi modo determinetur valor ipſius $\int\frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}$

Exemplum 1.

1049. Si curua data fuerit circulus centrum in D habens, cuius radius $MC = a$, erit $y = p = a$ et

et $b = a$. Sit praeterea medium vniforme ſeu $q = c$; erit $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m} = S$ et $V = \frac{2b}{a}$. Habebitur igitur $\frac{2b}{a} : P = a^2 b : (a^{2(1-m)} b^{1-m} + \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m})^{\frac{1}{1-m}}$, ſeu $P : 1 = (b^{1-m} + (m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}} : \frac{a}{2}$. Vnde oritur $P = \frac{2(b^{1-m}+(m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}}}{a}$. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$ et $P = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{2ac}$, et $v = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{4c}$, vnde ipſa celeritas erit $= \frac{2\sqrt{bc}-s}{2\sqrt{c}}$ et tempus, quo arcum AM abſoluit $2\sqrt{c}\, l \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-s}$. Opus ergo eſt tempore infinito, antequam corpus arcum abſoluat $= 2\sqrt{bc}$, quo, cum peruenerit omnem motum amittit et ſimul vis centripeta euanescit. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $v = be^{-\frac{s}{c}}$ et $P = \frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. Ceterum motus corporis in peripheria circuli prorſus congruit cum motu rectilineo, quo corpus motum impreſſum a reſiſtentia amittit. Vis enim centripeta quia ſemper eſt normalis celeritatem prorſus non afficit, ſed tantum motum in circulum inflectit.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 3.

1050. Deſcendat corpus ex A verſus centrum C in logarithmica ſpirali AM, ſitque exponens reſiſtentiae q vt dignitas quaecunque diſtantiae MC, y ita vt ſit $q = \frac{y^{n+1}}{f^n}$. Ex natura logarithmicae eſt $p = \alpha y$, atque facta $AC = a$ erit $s = \alpha a$, et poſito $\beta = \sqrt{(1-\alpha^2)}$ erit $ds = -\frac{dy}{\beta}$. Hinc erit $\int (m-1)\frac{p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(1-m)\alpha^{2(1-m)}f^{mn}}{(3-3m-mn)\beta}(y^{3-3m-mn} - a^{3-3m-mn}) = S$. Sit praeterea $b^{1-m} = \frac{(1-m)a^{1-m-mn}f^{mn}}{(3-3m-mn)\beta}$ erit $v = \frac{(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{1-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}}\beta^{\frac{1}{1-m}}}$

atque $P = \frac{2(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}}\beta^{\frac{1}{1-m}}}$. Vis centripeta igitur erit reciproce vt poteſtas diſtantiae, cuius exponens eſt $\frac{mn}{1-m}$.

Corollarium 5.

1051. Si vis centripeta eſt conſtans $= \frac{2}{(3\beta)^{\frac{1}{1-m}}}$, corpus in ſpirali logarithmica, cuius anguli interſectionis radiorum cum curua coſinus eſt β, moueri poterit, ſi exiſtente exponen-

te

te reſiſtentiae $= y$, et celeritate initiali debita alt. $(3g)^{\frac{1}{1-m}}$.

Corollarium 6.

1052. Si vis centripeta fuerit vt diſtantia y eleuata ad k, erit $-\frac{mn}{1-m} = k$ et $n = -\frac{k(1-m)}{m}$; vnde $P = \frac{2y^k}{(3+k)^{\frac{1}{1-m}} g^{\frac{1}{1-m}} f^k}$. Reſiſtente ergo exponens debet eſſe $= \frac{y^{\frac{m+mk-k}{k}}}{f^{\frac{mk-k}{m}}}$, et $v = \frac{y^{k+1}}{(2g+gk)^{\frac{1}{1-m}} f^k}$ vnde $b = \frac{a^{k+1}}{(3g+gk)^{\frac{1}{1-m}} f^k}$.

Corollarium 7.

1053. Tempus praeterea, quo arcus AM abſoluitur eſt $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2g^{\frac{2m-1}{2-2m}} f^{\frac{k}{2}}}{1-k} (a^{\frac{1-k}{2}} - y^{\frac{1-k}{2}})$. Tempus igitur, quo in centrum C vsque deſcendit eſt finitum ſi $k < 1$, infinitum vero erit ſi vel $k = 1$ vel $k > 1$.

Corollarium 8.

1054. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae $= \frac{y}{\delta}$ erit

$$\int \frac{ds}{q} = \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\, l\, \frac{a}{y} \text{ et } e^{\int \frac{ds}{q}} = \frac{a^{\frac{\delta}{\mathfrak{E}}}}{y^{\frac{\delta}{\mathfrak{E}}}} = \frac{a^i}{y^i} \text{ poſito } i = \frac{\delta}{\mathfrak{E}}$$

Hinc erit $v = \frac{by^{i-2}}{a^{i-2}}$ et $P = \frac{2\,by^{i-3}}{a^{i-2}}$. In medio igitur hoc reſiſtente corpus quamcunque logarithmicam ſpiralem deſcribere poterit, ſi fuerit vis centripeta $= \frac{2\,by^{i-3}}{a^{i-2}}$ et exponens reſiſtentiae $= \frac{y}{\mathfrak{E}i}$.

Scholion.

1055. In hoc igitur exemplo et corollariis annexis omnes continentur caſus, quibus corpus in medio quocunque reſiſtente logarithmicam ſpiralem deſcribere poteſt, ſollicitatum a vi centripeta poteſtati cuicunque diſtantiarum proportionali. Vbi caſus quo reſiſtentia proportionalis eſt quadratis celeritatum et eius exponens diſtantiis a centro hoc habet peculiare, vt ſtatim det vim centripetam poteſtati diſtantiarum proportionalem, quod in aliis reſiſtentiae hypotheſibus demum poſt certo modo determinatam celeritatem initialem obtinebatur. In illa autem reſiſtentiae hypotheſi, exiſtente exponente reſiſtentiae $\frac{y}{\delta}$, ſi corpus in A celeritate quacunque Vb ſecundum directionem, cuius cum AC inclinationis coſinus eſt $\mathfrak{E}$ proiiciatur, et vis centripeta in A fuerit $= \frac{2b}{a}$, corpus ſemper in logarithmica ſpirali mouebitur, ſi praeterea vis centri-

tripeta fuerit vt y^{i-3}, datur autem i quia eſt $i=\frac{\delta}{\varepsilon}$. In his igitur ſatis ſunt expoſita, quae motum in ſpirali logarithmica ſpectant.

PROPOSITIO 125.

Problema.

1056. *Si detur curua* AM, *quam corpus deſcribit et vis centripeta ad centrum* C *tendens; inuenire reſiſtentiam requiſitam in ſingulis locis* M *et celeritatem corporis.* Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Poſita $MC=y$, $CT=t$, $Mm=ds$, ſit vis centripeta in $M=P$. Deinde ponatur reſiſtentia in $M=R$, et altitudo debita celeritati in $M=v$. His poſitis erit $P=\frac{2vdp}{pdy}$ (1005) et $dv+\frac{2vdp}{p}=-Rds$ (1007). Ob datam curuam et vim centripetam ex illa aequatione inuenitur $v=\frac{Ppdy}{2dp}$, et differentiando poſito dy conſtante eſt $dv=\frac{3Pdy}{2}+\frac{pdPdy}{2dp}-\frac{Ppdyddp}{2dp^2}$. Quibus loco v et dv valoribus ſubſtitutis erit $R=\frac{Ppdyddp}{2dsdp^2}-\frac{pdPdy}{2dsdp}-\frac{3Pdy}{2ds}$. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis eius exponens ponatur q erit $R=\frac{v}{q}$ et $q=\frac{v}{R}$. Quare habebitur

$$q=\frac{Ppdsdp}{Ppddp-pdP-3Pdp}.$$

Ex data ergo curua ſeu aequatione inter y et p, et vi centripeta tam

 reſi-

reſiſtentiam R, quam celeritatem in ſingulis locis determinauimus. Q. E. I.

Corollarium 1.

1057. Alio exprimendi modo erit reſiſtentia $R = -\frac{1}{p^2 ds} d. \frac{Pp^3 dy}{2dp}$ et $q = -\frac{Pp^3 dy ds}{2dp.d.\frac{Pp^3dy}{2dp}}$ Ex quo perſpicitur ſi fuerit P vt $\frac{dp}{p^3 dy}$, euaneſcere reſiſtentiam. Hoc enim caſu vis centripeta ſola ſufficit ad curuam datam producendam.

Corollarium 2.

1058. Poſita celeritate initiali in $A = \surd b$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demiſſo $= h$ ſit vis centripeta, quae in vacuo faciat eſt corpus in hac curua moueatur, $= V$ erit $V = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ (592). Hanc ob rem $R = -\frac{bh^2}{p^2 ds} d. \frac{P}{V}$, et $q = -\frac{Pds}{V d.\frac{P}{V}}$ Atque $v = \frac{bh^2 P}{V p^2}$.

Corollarium 3.

1059. Si corpus in hac curua in vacuo a vi V ſollicitatum moueretur, ſit eius celeritas in *M* debita altitudini u; eritque $u = \frac{bh^2}{p^2}$. Vnde haec habebitur analogia $u:v = V:P$. Atque generaliter hoc theorema obtinet: celeritates corporis in eodem loco *M* ſunt in ſubduplicata ratione virium centripetarum.

Co-

Corollarium 4.

1060. Si vis centripeta fuerit conſtans ſeu $P = g$, erit $R = \frac{bb^2 g dV}{V^2 p^2 ds}$ et $q = \frac{Vds}{dV}$. Atque $v = \frac{bb^2 g}{Vp^2}$.

Exemplum.

1061. Deſcendat corpus in ſpirali hyperbolica AM, cuius natura hac aequatione exprimitur; $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, et ſit vis centripeta vt dignitas quaecunque a centro ſpiralis C; ſcilicet $P = \frac{y^n}{f^n}$. Erit $ds = -\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, et $\frac{p^3 dy}{dp} = y^3$. Vnde prodit

$$R = \frac{(n+3)y^{n+1}\sqrt{(a^2+y^2)}}{2a^2 f^n} \text{ et } v = \frac{y^{n+3}(a^2+y^2)}{2a^2 f^n}$$

atque ex his $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. Si medium ergo reſiſtit in duplicata celeritatum ratione erit exponens reſiſtentiae $= \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. At ſi medium reſiſtat in ſimplici ratione celeritatum, et exponens reſiſtentiae ſit q erit $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{v}}{R} = \frac{af^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{(n+3)y^{\frac{n+1}{2}}}$, atque $q = \frac{2a^2 f^n}{(n+3)^2 y^{n+1}}$. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi medium erit vniforme ſi $n = -1$; hoc eſt ſi vis centripeta eſt in reciproca ratione diſtantiarum. Fit enim $q = \frac{a^2}{f}$. At ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, fiet reſiſtentiae expo-

nens $=\frac{2a^2y}{f^2}$ ſeu erit proportionalis ipſis a centro diſtantiis.

Scholion.

1062. Sequi hic deberet iuxta noſtrum inſtitutum problema, quo ex data curua et celeritate in ſingulis locis quaeruntur tam vis centripeta, quam reſiſtentia; ſed cum huius ſolutio ſit facillima et ex ipſis canonibus ſupra (1007), datis ſponte fluat; atque praeterea ex eo nihil notatu digni deduci queat, hic praetermitto. Inuenitur autem $P=\frac{2vdp}{pdy}$ et $R=-\frac{pdv-2vdp}{pds}$, quae formulae problema ſoluunt. Adiicio vero loco huius problematis aliud affine, quo praeter curuam motus angularis circa centrum virium datur et tam vis centripeta quam vis reſiſtentiae quaeruntur.

PROPOSITIO 126.

Problema.

Tabula XIII Fig. 4.

1063. *Si detur curua* AM *in qua corpus mouetur et motus angularis circa centrum virium* C, *inuenire tam vim centripetam ad* A *tendentem, quam reſiſtentiam in ſingulis locis.*

Solutio.

Poſitis vt hactenus $CM=y$, $CT=p$, $Mm=ds$ celeritate in M debita altitudini v, vi centripeta $=P$ et vi reſiſtentiae $=R$, concipiatur centro C radio $EC=1$ deſcripta peripheria circuli ELl, in

qua

qua corpus eodem motu angulari circa C feratur, quo corpus in curua AM. Elementum ergo L*l* eodem tempore abſoluitur, quo elementum M*m*. Sit nunc celeritas per L*l* debita altitudini u; erit u data, quia motus angularis datur. Atque habebitur $\frac{Ll}{\surd u} = \frac{Mm}{\surd v}$. Eſt vero $Ll : mr = 1 : y$ ſeu $Ll = \frac{mr}{y}$, porroque eſt $mr : Mm = p : y$, ideoque $mr = \frac{p . Mm}{y}$, et conſequenter $Ll = \frac{p . Mm}{y^2}$. Hanc ob rem habebitur $\frac{p}{y^2 \surd u} = \frac{1}{\surd v}$, hincque $v = \frac{y^4 u}{p^2}$. Inuenta iam hac ratione v erit $P = \frac{2 y^4 u dp}{p^3 dy}$ (1005), et $R = -\frac{y^4 du - 4 y^3 u dy}{p^2 ds}$ (1007). Atque ſi reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae $= q$, erit $q = -\frac{y u ds}{y du + 4 u dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1064. Si vis centripeta P proportionalis eſt ipſi $\frac{dp}{p^3 dy}$, id quod accidit, quando corpus mouetur in vacuo; erit u reciproce vt y^4. Quare celeritas angularis tum eſt reciproce vt quadratum diſtantiae corporis a centro. Facto autem $y^4 u$ conſtante ex aequatione altera perſpicitur euanescere reſiſtentiam R.

Corollarium 2.

1065. Si corpus ad centrum C accedit ita vt y decrescat erit $ds = -\frac{y dy}{\surd (y^2 - p^2)}$. Quare erit reſiſtentia $R = \frac{(y^3 du + 4 y^2 u dy) \surd (y^2 - p^2)}{ppdy}$, et $q = \frac{y^2 u dy}{(y du + 4 u dy) \surd (y^2 - p^2)}$. Ex quo intelligitur ſi $y^4 u$ fuerit poteſtas ipſius y,

cu-

cuius exponens eſt numerus affirmatiuus, reſiſtentiam fore affirmatiuam. At ſi exponens illius poteſtatis ipſius y fuerit negatiuus reſiſtentia quoque erit negatiua.

Corollarium 3.

1066. Si motus angularis debeat eſſe aequabilis ſeu u conſtans, erit $du = 0$ ideoque $R = \frac{4y^2u\sqrt{(y^2-p^2)}}{p^2}$ et $q = \frac{y^2}{4\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Corollarium 4.

1067. Sit celeritas angularis vt poteſtas exponentis n diſtantiae y ſeu $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ erit reſiſtentia $R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(y^2-p^2)}}{f^{2n-1}p^2}$, vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+4}dp}{f^{2n-2}p^3dy}$; et $v = \frac{y^{2n+4}}{f^{2n-1}p^2}$ atque pro medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum erit exponens reſiſtentiae $q = \frac{y^2}{2(n+2)\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Exemplum.

1068. Sit curua AM iterum ſpiralis hyperbolica aequatione $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$ expreſſa, et celeritas angularis ſit vt y^n ſeu vt ante $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ Cum autem ſit $\sqrt{(y^2-p^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, erit

R=

$R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2 f^{2n-1}}$; $v = \frac{y^{2n+2}(a^2+y^2)}{a^2 f^{2n-1}}$

et vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+1}}{f^{2n-1}}$. Si reſiſtentia ponatur ipſis celeritatibus proportionalis erit, exponens reſiſtentiae $= \frac{a^2 f^{2n-1}}{(2n+4)^2 y^{2n+2}}$. Sin reſiſtentia quadratis celeritatum ponatur proportionalis, et exponens reſiſtentiae ſit q, erit $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2n+4}$. Quae prorſus conueniunt, cum iis quae ſuperiore exemplo (1061) ſunt tradita.

PROPOSITIO 127.

Problema.

1069. *Si detur reſiſtentia per quamuis celeritatum poteſtatem ſimulque exponens reſiſtentiae, praeterea etiam datus ſit motus angularis corporis circa centrum* C: *ex his inuenire curuam, quam corpus deſcribet et vim centripetam ad centrum* C *tendentem.* Tabula XIII Fig. 4.

Solutio.

Poſitis $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, altitudine celeritati in M debita $= v$, vi centripeta $= P$, reſiſtentia $= R$; ſit reſiſtentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, vbi q detur per y. Deinde motus angularis conſideretur vt ante

te tanquam motus puncti factus in peripheria circuli ELl, cuius radius CE$=1$. Poſita nunc celeritate, qua Ll deſcribitur, debita altitudini u, erit vt in praec. Prop. elicuimus $v = \frac{y^4 u}{p^2}$, $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds} = \frac{v^m}{q^m} = \frac{y^{4m} u^m}{p^{2m} q^m}$. Haec poſterior aequatio autem, quia u et q ſunt quantitates datae, exprimet naturam curuae quaeſitae, pro qua ergo habebitur $y du + 4u dy + \frac{y^{4m-3} u^m ds}{p^{2m-2} q^m} = 0$ ſeu $y du + 4u dy = \frac{y^{4m-2} u^m dy}{p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Cognita vero curuae deſcriptae natura, ſeu aequatione inter p et y innoteſcet ſtatim vis centripeta P quippe eſt $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1070. Si celeritas angularis debeat eſſe aequabilis, quod in vacuo niſi in circulo fieri nequit, erit $du = 0$, haecque prodibit pro curua quaeſita aequatio $4p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = y^{4m-2} u^{m-1}$. Data ergo q per y, aequatio haec eſt integralis inter p et y, ex qua curua poteſt conſtrui.

Corollarium 2.

1071. Si fuerit u per y data vt $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$, erit $(2n+4) p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = y^{2mn}$

$\frac{y^{2mn+4m-2n-2}}{f^{(m-1)(2n-1)}}$. Quae quoque eſt integralis inter y et p, ideoque ad curuam conſtruendam eſt idonea.

Corollarium 3.

1072. Si celeritas angularis detur per arcum EL, ſeu du per eius elementum $Ll = \frac{p.Mm}{y^2}$ (1063) $= -\frac{p\,dy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, ita vt ſit $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$; erit $\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{g^k y\,du}{u^k p}$. Hoc valore ſubſtituto habebitur $y\,du + 4\,u\,dy = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{p^{2m-1} q^m}$ atque $p^{2m-1} = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{q^m y du + 4 q^m u dy}$. Ex qua aequatione valor ipſius p ſubſtitutus in aequatione $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, determinabit u in y. Vnde quoque aequatio inter p et y obtinebitur.

Corollarium 4.

1073. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum ſeu $m = \frac{1}{2}$; aequatio $1 = \frac{g k y u^{\frac{1}{2}-k} du}{(y\,du + 4\,u\,dy)\sqrt{q}}$ ſtatim dabit u per y. Qui va-

 lor

lor in aequatione $du = \frac{u^k p\, dy}{g^k y \sqrt{(y^2 - p^2)}}$ ſubſtitutus dabit aequationem inter y et p.

Exemplum 1.

1074. Reſiſtat medium in duplicata ratione diſtantiarum ſitque medii exponens $q = \frac{y}{\alpha}$. Motus vero angularis ſit aequabilis ſeu $u = b$. Erit $m = 1$, atque $4\sqrt{(y^2 - p^2)} = \alpha y$ (1070). Vnde prodit $p = \frac{y\sqrt{(16 - \alpha^2)}}{4}$. Quare curua deſcripta erit ſpiralis logarithmica, in qua anguli quem radius cum tangente conficit ſinus eſt $\frac{\sqrt{(16 - \alpha^2)}}{4}$ et coſinus $= \frac{\alpha}{4}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{32by}{16 - \alpha^2}$. Sin autem medium ponatur vniforme ſeu $q = c$, erit $4c\sqrt{(y^2 - p^2)} = y^2$, et $p = \frac{y\sqrt{(16cc - yy)}}{4c}$.

Exemplum 2.

1075. Reſiſtat medium in ſimplici ratione celeritatum, ſitque id vniforme: ponatur vero etiam motus angularis vniformis, erit $m = \frac{1}{2}$, $q = c$, $u = b$. His ſubſtitutis habebitur pro curua deſcripta haec aequatio $p = 4\sqrt{bc(y^2 - p^2)}$ ſeu $p = \frac{4y\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$. Quae curua quoque eſt ſpiralis logarithmica, in qua anguli interſectionis ſinus eſt $\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$, coſinus $= \frac{1}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$ atque tangens $= 4\sqrt{bc}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{y(1 + 16bc)}{8c}$. Quod in his formulis vniformitas dimenſionum non obſeruetur ratio eſt, quod radium circuli EC poſuimus $= 1$. Hac igitur vnitate vniformitas dimenſionum eſt reſtituenda.

Scho-

Scholion.

1076. Plura centra virium in hoc capite non conſiderabimus, cum in vacuo etiam pro hoc caſu vix quicquam ad motum determinandum deduci potuerit. Si centra quidem attrahant in ſimplici ratione diſtantiarum, quotcunque centra plus non habent difficultatis quam vnum in eadem ratione attrahens, quemadmodum oſtendimus ſupra (702). Haecque conuenientia in medio reſiſtente aeque locum habet ac in vacuo. Quamobrem cum iam vnum centrum in ſimplici ratione diſtantiarum attrahens conſiderauerimus, non opus eſt vt de pluribus eiusdem naturae verba faciamus. Progrediemur igitur ad caſum latiſſime patentem, in quo omnes motus, qui fiunt in eodem plano, comprehenduntur. Conſiderabimus ſcilicet duas vires abſolutas, quarum directiones ſunt ad ſe inuicem normales, ſingulae vero inter ſe parallelae. Ad huiusmodi enim duas vires quasuis potentias in eodem plano exiſtentes reſolui poſſe conſtat. Practerea in hac tractatione non ſolum omnes caſus potentiarum abſolutarum complectemur, ſed etiam quaedam eximia pro vacuo obſeruare licebit circa vires centripetas, quae in praecedentibus difficulter patent. Namque hic ſtatim curuam deſcriptam ad aequationem inter coordinatas orthogonales reducemus, quod ibi inter diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem eſt factum.

PROPOSITIO 128.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 5. 1077. *Si corpus in* M *a duabus viribus ſollicitetur, quarum vna habeat directionem* MP *normalem ad datam* AC, *altera vero directionem* MQ *parallelam ipſi* AC *ſeu normalem in* BC, *determinare curuam* AM *quam corpus in quocunque medio reſiſtente ab his potentiis ſollicitatum deſcribet.*

Solutio.

Vocetur $CM = MQ = x$, $PM = CQ = y$, elementum $Mm = ds$: ductisque mp et mq, erit $Pp = -dx$ et $Qq = dy$; atque $ds \sqrt{} = (dx^2 + dy^2)$. Sit vis qua corpus ſecundum MP trahitur $= P$ et vis qua corpus ſecundum MQ trahitur $= Q$, reſiſtentia vero ſit $= R$, et celeritas in M debita altitudini v. Reſoluantur nunc vires P et Q in normales et tangentiales ope demiſſorum perpendiculorum ex P et Q in tangentem Tt; erit ergo vis normalis ex P orta $= \frac{P.PT}{PM} = -\frac{Pdx}{ds}$, et vis tangentialis $= \frac{P.MT}{MP} = \frac{Pdy}{ds}$. Ex vi Q vero reſoluta oritur vis tangentialis $= \frac{Q.Mt}{MQ} = -\frac{Qdx}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Q.Qt}{MQ} = \frac{Q.dy}{ds}$. Tota ergo vis normalis erit $= \frac{Qdy - Pdx}{ds}$; et vis tangentialis promouens $= -\frac{Qdx - Pdy}{ds}$, quae vi reſiſtentiae R debet diminui, quo tota vis motum accelerans prodeat. Ex his, ergo poſito r radio osculi in M, erit $\frac{Qdy - Pdx}{ds} = \frac{2v}{r}$

et

et $dv = -Qdx - Pay - Rds$ (866). Eliminata ergo v ex his aequationibus orietur aequatio naturam curuae deſcriptae exprimens. Q. E. I.

Corollarium 1.

1078. Si ponatur elementum curua ds conſtans erit radius osculi $r = -\frac{dsdy}{ddx} = \frac{dsdx}{day}$. Hoc igitur valore ſubſtituto erit $\frac{2v.ddx}{dy} = Pdx - Qdy$.

Corollarium 2.

1079. Ex aequationibus inuentis coniungendis reperietur $P = -\frac{2vddy - dvdy - Rdyds}{ds^2}$ et $Q = -\frac{2vddx - dvdx - Rdxds}{ds^2}$. Ex quibus ſi relatio inter P et Q datur, ſtatim habetur aequatio, in qua v per ſolam curuam inuenitur.

Corollarium 3.

1080. Si corpus perpetuo a vi quacunque ad centrum C attrahatur erit $P:Q = y:x$. Tunc igitur habebitur iſta aequatio $2vxddy + xdvdy + Rxdyds = 2vyddx + ydvdx + Rydxds$. Quae poſito $y = px$ abit in hanc $2vxddp + 4vdpdx + xdvdp + Rxdpds = 0$, ſeu $d.vx^4dp^2 + Rx^4dp^2ds = 0$.

Corollarium 4.

1081. In vacuo, quo R euaneſcit et corpus ad centrum C attrahitur, erit $vx^4dp^2 = Ads^2$ ſeu $v = \frac{Ads^2}{x^4dp^2}$. Praeterea vero erit $\int Pdy = \frac{vdy^2}{ds^2}$ et

$v =$

$v = -\frac{ds^2 \int Pdy}{dy^2}$. Quare habebitur iſta aequatio $-\frac{Ady^2}{x^4 dp^2} = \int Pdy$, ſeu aſſumto Q loco P haec aequatio $-\frac{Adx^2}{x^4 dp^2} = \int Qdx$.

Corollarium 5.

1082. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n+1}{2}}}{f^n}$ In vacuo igitur pro curua deſcripta habebitur haec aequatio $-\frac{Adx^2}{x^4 dp^2} = \int \frac{x^n dx (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}$. Poſito B pro $-Af^n$, et dx conſtante, orietur differenando haec aequatio $2Bxdxddp + 4Bdx^2 dp + x^{n+5} dp^3 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Poſito vero dp conſtante prodiiſſet haec aequatio $2Bxddx - 4Bdx^2 = x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$. Fiat $x = \frac{1}{q}$; erit $2Bq^{n+2} ddq + dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Harum aequationum quamuis integratio non appareat, tamen integralis eſt $x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n+1}{2}} = Cds^2$, quae ex cap. praeced. inuenitur.

Corollarium 6.

1083. Quanquam autem haec aequatio $2B q^{n+2} ddq + dp^2 (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0$ eſt differentialis ſecundi gradus, tamen commodior eſt quam differen-

rentialis primi gradus ad curuas determinandas, quas corpus proiectum deſcribit attractum vel in ſimplici diſtantiarum ratione vel in reciproce duplicata. In ſimplici enim ratione habebitur $n = 1$ atque $2Bq^3 ddq + dp^2 = 0$. Fiat $dp = wdq$ ob dp conſtans erit $ddq = -\frac{dwdq}{w}$, vnde $2Bq^3 dw = w^3 dq$, et $\frac{B}{w^2} = \frac{1}{q^2} + C$. Erit ergo $w = \frac{q\sqrt{B}}{\sqrt{(1+Cq^2)}}$ atque $p + \alpha = \frac{\sqrt{B(1+Cq^2)}}{C} = \frac{\sqrt{B(x^2+C)}}{Cx} = \frac{y}{x} + \alpha$ ſeu $\alpha x + \beta y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Quia B eſt quantitas negatiua.

Corollarium 7.

1084. Si eſt $n = -2$ ſeu ſi corpus in reciproca duplicata ratione diſtantiarum attrahitur, erit in vacuo curua deſcripta $2Bddq = \frac{dp^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ ſumto B negatiuo, vt oportet. Integrando ergo erit $2Bdq + Cdp = \frac{pdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, denuoque integrando $2Bq + Cp = D + \sqrt{(1+pp)}$ ſeu $2B + Cy = Dx + \sqrt{(x^2+y^2)}$. Quarum curuarum vtraque eſt ſectio conica, illa quidem ellipſis tantum, haec vero omnes complectitur.

Scholion 1.

1085. In Capite praecedente, quo de motu corporum in vacuo egimus, curuas quoque determinauimus, quas corpus a vi centripeta vel ipſis diſtantiis vel reciproce earum quadratis proportionali deſcribit; easque conuenientes inuenimus cum his in corollariis datis. Modi quidem maxime ſunt

 di-

diuerſi, nam ibi ex comparatione arcuum circularium aequationes algebraicas ſumus adepti, hic vero ipſa integratio ſponte aequationem algebraicam inter coordinatas dedit. Haec vero methodus, quamuis in praefatis caſibus duobus multo ſit commodior, tamen aliis laborat defectibus. Nam in aliis vis centripetae hypotheſibus nequidem hac methodo aequatio differentialis dari poteſt pro curua deſcripta, quod tamen illa directa methodo ſemper aeque facile fieri poteſt. Hoc tamen ipſius analyſeos defectui potius eſt adſcribendum quam methodo, cum aequationis differentio - differentialis $2Bxddx - 4Bddx^2 = x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$ integralem $x^{n+5}dp^2(1+p^2)^{\frac{n+1}{2}} + Cds^2 = o$ eſſe ſciamus ex ipſa methodo cap. praeced. vſitata, hanc vero integralem ex ipſa aequatione differentio-differentiali eruere nequeamus.

Scholion 2.

1086. Problematum reciprocorum, quae circa has potentias proponi poſſunt, hoc iam eſt ſolutum coroll. 2. quo ex data curua, medio reſiſtente et celeritate in ſingulis punctis quoque data, quaeruntur vires ſecundum MP et MQ tendentes, quae hunc motum producant. Vt ſi curua AMB fuerit circulus centrum in C et radium $AC = a$ habens, et reſiſtentia ſit $= \frac{v}{c}$, atque celeritas conſtans nempe $v = b$, erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $P = \frac{2bcy - abx}{a^2c}$ et

Q=

$Q = \frac{2bcx + aby}{a^2c}$. Simili modo cum ſint quinque res, quae in conſiderationem veniunt, nempe duae potentiae P et Q, tertio reſiſtentia R, qu rto celeritas in ſingulis locis ſeu v, et quinto natura curuae deſcriptae ſeu aequatio inter x et y; ſemper tria horum tanquam data accipi poſſunt et duo reliqua ex iis inueniri. Hanc ob rem decem formari poſſent problemata pro numero combinationum, quo tria ex quinque accipi poſſunt. Sed ne nimis detineamur in his euoluendis, e quibus non multum ad vſum deduci poterit, vnicum problema quo in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex data vi centripeta curua deſcripta quaeritur.

PROPOSITIO 129.

Problema.

1087. *Si corpus moueatur in medio, quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; et ſi potentia* P *fuerit ad* Q *vt* MP *ad* MQ, *ſeu quod idem eſt, ſi corpus trahatur ad centrum* C *vi quacunque determinare curuam* AMB, *quam corpus deſcribet.* Tab. XIII. Fig. 5.

Solutio.

Poſitis vt ante $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, et $y = px$, ſit celeritas in M debita altitudini v et exponens reſiſtentiae q, erit $R = \frac{v}{q}$. Et cum ſit $P : Q = y : x$ erit $2vxddp + 4vdpdx + xdvdp + \frac{vxdpds}{q} = 0$

 (1080).

(1080). Quae aequatio diuiſa per $vxdp$ abit in hanc $\frac{2ddp}{dp}+\frac{4dx}{x}+\frac{dv}{v}+\frac{ds}{q}=0$; cuius integralis eſt $e^{\int\frac{ds}{q}}x^4vdp^2=Ads^2$; ſeu $v=\frac{Ae^{-\int\frac{ds}{q}}ds^2}{x^4dp^2}$. Haec vero aequatio $Qds^2+2vddx+dvdx+\frac{vdxds}{q}=0$ (1079) per $\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}dx}{ds^2}$ multiplicata et integrata dat $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}vdx^2}{ds^2}=0$; in qua ille valor ipſius v inuentus ſubſtitutus dat $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{Adx^2}{x^4dp^2}=0$. Differentietur haec aequatio poſito dx conſtante erit $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^3=5Adx^2dp+2Axdxddp$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1088. Aequatio haec pro curua deſcripta non differt ab aequatione in vacuo inuenta (1081) niſi quod hic habeatur $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx$, cum ibi ipſi $-\frac{Adx^2}{x^4dp^2}$ aequaretur tantum $\int Qdx$.

Corollarium 2.

1089. Si elementum dp pro conſtante fuiſſet aſſumtum, tum prodiiſſet haec aequatio $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^2$ $=4A$

$= 4 A dx^2 - 2 A x ddx$. In qua ſi ponatur $x = \frac{1}{z}$, orietur $e^{\int \frac{ds}{q}} Q dp^2 = 2 A z^2 ddz$.

Corollarium 3.

1090. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1 + p^2)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q = \frac{x^n (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n} = \frac{(1 + pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n z^n}$. Quare pro curua deſcripta habebitur iſta aequatio $e^{\int \frac{ds}{q}} dp^2 = \frac{2 A f^n z^{n+2} ddz}{(1 + pp)^{\frac{n-1}{2}}}$. Quae ſumtis logarithmis et differentiata dat $\frac{ds}{q} = \frac{(n+2) dz}{z} + \frac{d^3 z}{ddz} - \frac{(n-1) p dp}{1 + pp}$. Eſt vero $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2 p z dp dz)}}{z^2}$.

Corollarium 4.

1091. Iisdem manentibus ſit $q = \frac{MC}{\alpha} = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\alpha z}$, erit $\frac{\alpha \sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2 p z dp dz)}}{z \sqrt{(1 + pp)}} = \frac{(n+2) dz}{z} + \frac{d^3 z}{ddz} - \frac{(n-1) p dp}{1 + pp}$ Ponatur $z = e^{\int u dp}$, atque prodibit iſta aequatio $\frac{\alpha dp \sqrt{(1 - 2 pu + u^2 + p^2 u^2)}}{\sqrt{(1 + pp)}} = (n + 3) u dp + \frac{ddu + 2 u du dp}{du + u^2 dp} + \frac{(n-1) p dp}{1 + pp}$

Scholion.

1092. Hanc aequationem differentialem ſecundi gradus dubito, an in quoquam caſu ad differen-

tialem primi gradus poſſit reduci; id quod tamen ſupra, vbi vires centripetas ex inſtituto conſiderauimus, fecimus (1020). In medio igitur reſiſtente haec operandi ratio non tantam vtilitatem afferre videtur, quantam in vacuo attulit, ſaltem pro pro caſibus quibus n eſt vel 1 vel -2. Quamobrem cum in hac re vix quicquam amplius ſperari poſſit, hic motum in medio reſiſtente, qui in plano fit relinquo atque ad motus non in plano factos conſiderandos progredior, coniuncta cum potentiis abſolutis corpus ſollicitantibus vi reſiſtentiae. Quo in negotio, cum facile intelligatur, parum ad euidentem cognitionem perducere licere, contentus ero regulas generales tradidiſſe, quibus pro quouis problemate propoſito ad aequationem peruenire poterimus.

PROPOSITIO 130.
Problema.

Tabula XIII Fig. 6.

1093. *In medio quocunque reſiſtente ſollicitetur corpus a tribus potentiis, quarum vna ſit tangentialis, reliquae duae normales ad directionem corporis et in duobus planis inter ſe normalibus ad ſe inuicem normales, determinare motum corporis et curuam quam deſcribet.*

Solutio.

Ex elementi Mm quod corpus deſcribit, terminis M et m in planum fixum APQ demittantur

per-

perpendicula QP et qp. Deinde ponatur $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, altitudo celeritati in M debita $= v$. Iam ſit vis tangentialis $= T$. Normalium altera cuius directio in plano Mq eſt ſita, ſit $= N$, et altera cuius directio ad planum Mq eſt normalis ſit $= M$. Vis reſiſtentiae vero ſit $= V$. Quia autem vis reſiſtentiae V vires normales non afficit, ſed tantum effectum vis tangentialis minuit; effectus virium N et M immutatus manet, ſed in effectu vis tangentialis definiendo loco T poni debet $T - V$. Quare cum harum virium effectus iam ſupra (809) determinauerimus, eaedem aequationes ibi datae et hic valebunt ſi modo $T - V$ loco T ponatur. Hanc ob rem pro medio reſiſtente prodibunt hae aequationes $dv = (T - V)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; $2vdy\,dzddy - 2vddz(dx^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; atque $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (809). Ex quibus eliminata v duae habebuntur aequationes tres coordinatas x, y et z inuoluentes, quae naturam curuae quaeſitae expriment. In illis autem aequationibus elementum dx conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

Corollarium I.

1094. Duae poſteriores aequationes coniunctae eliminanda v dant aequationem hanc; $\frac{ddz(dx^2 + dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{M}$. Quae pro medio quocunque aeque ac pro vacuo valet (810).

Co-

Corollarium 2.

1095. Perſpicitur ex hac aequatione, ſi vel N vel *M* euaneſcit, qualis ſit motus corporis. Nam poſito N$=o$ erit $\frac{ddz}{dz}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ ſeu $adz=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Eſt vero $\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ tangens anguli, quo elementum *Mm* inclinat ad *Qq*. Quare hic angulus eſt conſtans, propterea QM habet ad proiectionem BQ curuae deſcriptae in plano APQ datam rationem.

Corollarium 3.

1096. Si M$=o$ erit $ddy=o$, ideoque proiectio BQ erit linea recta. Tota igitur curua a corpore deſcripta poſita erit in plano ad planum APQ normali, idque ſecante recta BQ.

Corollarium 4.

1097. Ex aequatione § 1094 erit $ddz(dx^2+dy^2)=dydzddy+\frac{Ndxdy^2\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quare cum ſit $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ erit $-2vdxddz(dx^2+dy^2)=Mdydz(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}+Ndx(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Corollarium 5.

1098. Quare ſi fuerit $\frac{Mdydz}{dx}+N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=o$, corpus etiam mouebitur in plano, cum tunc ſit $ddy=o$ et $dz=adx$. Proiectio enim cur-

curuae deſcriptae in plano ad planum APQ in AP normali erit linea recta.

Corollarium 6.

1099. Planum autem in quo poſita ſunt duo elementa Mm et $m\mu$, quae corpus deſcribit, ſimili modo quo in vacuo determinatur, cum eius determinatio tantum a coordinatis x, y et z pendeat. Nempe ſi hoc planum ſit SMR et ſecet planum APQ recta OR, erit $AO = x - \frac{zdxddy + ydxddz}{dzddy - dyddz}$; tangens ang. $POR = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$. Atque tangens anguli quem planum RMS cum plano APQ conſtituit ſeu $\frac{MQ}{QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$ (812). Tab. XIV. Fig. 1.

Corollarium 7.

1100. Erit igitur tangens anguli, quem planum RMS cum plano APQ conſtituit, aequalis ſecanti anguli POR ductae in $\frac{ddz}{ddy}$.

Corollarium 8.

1101. In caſu igitur, quo vis N euaneſcit cum ſit $ddz : ddy = dydz : dx^2 + dy^2$, erit tangens anguli $POR = \frac{dx}{dy}$, ſeu POR = RQS. Tum igitur QV in QS incidet. Tangens vero anguli quem RMS cum RQS conſtituit eſt $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Quare hic angulus eſt conſtans ob $\alpha dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (1095). Reperitur vero $AO = \frac{xdx + ydy - \alpha^2 zdz}{dx}$.

Corollarium 9.

1102. Cum in coroll. 1 ratio detur inter ddy et ddz, per vires normales M et N, ſi eorum proportionalia ipſorum loco ſubſtituantur, determinabitur poſitio plani RMS per differentialia primi gradus. Sed haec omnia non magis ad medium reſiſtens reſpiciunt, quam ad vacuum. Quare etiam haec prorſus conueniunt cum iis, quae ſupra Prop. 98 ſunt tradita.

PROPOSITIO 131.

Problema.

1103. *Si corpus* M *in medio quocunque reſiſtente trahatur a tribus viribus, quarum vnius directio ſit* Mf *parallela axi* AR *alterius directio* Mq *parallela ipſi* PQ *applicatae in plano* APQ *poſitae, et tertiae directio ſit ipſa* MQ *ex* M *in planum* APQ *normaliter demiſſa: inuenire motum corporis et lineam quam deſcribet.*

Tab. XIV. Fig. 2.

Solutio.

Poſitis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, atque celeritate in M debita altitudini v, ſit vis ſecundum Mf trahens $= P$, vis ſecundum Mg trahens $= Q$ et vis ſecundum MQ trahens $= R$ atque vis reſiſtentiae in $M = V$. Hae tres vires ſi reſoluantur in tres alias, quarum directiones cum iis in Prop. praec. conueniunt, prodit vis tan-

tangentialis $T = \frac{Pdx - Qdy - Rdz}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $N = \frac{Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ atque $M = -\frac{Pdy+Qdx}{\surd(dx^2+dy^2)}$ (823). Iisdem enim hic denominationibus vtimur, quibus ibi Prop. 99. His igitur valoribus in formulis praec. Prop. iuuentis ſubſtitutis habebuntur ſequentes tres aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V \surd(dx^2+dy^2+dz^2)$; $\frac{2vdydzddy - 2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)$; atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$. Quae tres aequationes eliminata v dabunt duas aequationes coordinatas x, y et z continentes, quae naturam curuae deſcriptae exprimunt. In his autem formulis elementum dx conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

Corollarium 1.

1104. Duae poſteriores aequationes cum iis quas pro vacuo inuenimus (823) perfecte conueniunt. Quare quae ex iis ſequuntur tam in vacuo quam medio quocunque reſiſtente locum habent. Discrimen autem totum, quod inter motum in vacuo et medio reſiſtente intereſt, a prima pendet aequatione.

Corollarium 2.

1105. Ex duabus poſterioribus aequationibus autem coniunctis oritur haec analogia $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$. Quamobrem loco ſecundae aequationis, quae reliquis magis eſt compoſita ſubſtitui

ſtitui poteſt haec: $\frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdz - Rdx$, vel $Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy - Rdxddy$, quae v non inuoluit.

Corollarium 3.

1105. Ope analogiae $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$ inuenitur determinatio plani RMS in differentialibus primi gradus vt ſequitur; $AO = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy}$; tangens anguli $POR = - \frac{Qdz + Rdy}{Pdz - Rdx}$ atque tangens anguli inclinationis plani RMS ad planum fixum $RQS = \frac{\sqrt{((Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2)}}{Pdy - Qdx}$ (825).

Corollarium 4.

1106. Si virium P, Q, R duae euaneſcant motum corporis in plano fieri neceſſe eſt. Nam ſi P et Q euaneſcunt fit $ddy = o$, ſi P et R euaneſcunt fit $azddy = dyddz$ ſeu $dz = \alpha dy$. Quae omnia indicant motum fieri in plano.

Corollarium 5.

1107. Si P, Q et R ſint proportionales ipſis x, y et z, corpus perpetuo ad punctum A trahetur, ideoque motus eius fiet in plano. Hoc idem indicant formulae, fiet enim $AO = o$. At ob $ddy : ddz = xdy - ydx : xdz - zdx$, eſt $\frac{xddy}{xdy - ydx} = \frac{xddz}{xdz - zdx}$ et integrando $xdy - ydx = \alpha xdz - \alpha zdx$. Quare eſt $\alpha ddz = ddy$, vnde conſtat propoſitum.

Co-

Corollarium 6.

1108. Si vis P euaneſcit erit $ddy:ddz = Q:R$, atque $R = -\frac{2vddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $Q = -\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$. His valoribus loco P, Q et R in aequatione, qua dv definitur, ſubſtitutis oritur $dv = \frac{2vdyddy+2vdzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Vbi ſi reſiſtentia V fuerit $= \frac{v}{c}$ ponaturque $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ ſeu $Mm = ds$, erit

$$lv = l\frac{ads^2}{dx^2} - \frac{s}{c};\ \text{ſeu}\ v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}.$$

Corollarium 7.

1109. Si vis R euaneſcit erit $ddy:ddz = Pdy - Qdx : Pdz$, atque $P = \frac{2vdxddz}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$ et $Q = -\frac{2v(dyddz-dzddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$. Erit igitur $dv = -\frac{2vdx^2ddz-2vdy^2ddz+2vdydzddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz} - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Vbi ſi $V = \frac{v}{c}$ erit $lv = l\frac{ads^2}{dz^2} - \frac{s}{c}$ ſeu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dz^2}$. Simili modo ſi Q euaneſcit prodit

$$v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dy^2}.$$

Scholion.

1110. Ad has tres vires P, Q et R omnes potentiae, quaecunque excogitari queant, reduci poſſunt. Quamobrem quodcunque problema propoſi-

poſitum fuerit, duae aequationes erui poſſunt naturam curuae deſcriptae continentes. Harum vero altera erit differentialis ſecundi gradus altera differentialis tertii gradus, ſi quidem valor ipſius v inuentus ex aequatione $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$ differentietur; et differentiale loco dv in aequatione $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ ſubſtituatur.

PROPOSITIO 132.

Problema.

Tabula XIV Fig. 2. 1111. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum, trahatur corpus perpetuo normaliter ad rectam* AP; *definire curuam quam corpus vtcunque proiectum deſcribet.*

Solutio.

Ponantur vt hactenus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, celeritas in $M = \sqrt{v}$, exponens reſiſtentiae $= c$, vis qua corpus in M iuxta MP trahitur $= S$. His poſitis erit reſiſtentia $V = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$, $P = o$, $Q = \frac{Sy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Sz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$, vnde fit $Q : R = y : z$. Quamobrem habebitur $ddy : ddz = y : z$, atque $yddz - zddy = o$. Cuius aequationis integralis eſt $ydz - zdy = adx$. Porro quoque ob $P = o$ haec habebitur aequatio $dv = \frac{2vdds}{ds} - Vds = \frac{2vdds}{ds} - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ (1108), poſito $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Cuius integralis eſt $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx}(b - x)$, ſeu $v = \frac{ds^2(b-x)^2}{4cdx^2}$. Hoc valore ſubſtituto prodibit $\frac{ddy(b-x)^2}{2cdx} = -\frac{Sydx}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Ponatur $z = py$; habebuntur ſe-

ſequentes duae aequationes, ex quibus natura curuae deſcriptae debet determinari, $y^2dp = adx$ et $ddy(b-x)^2 = -\frac{2cSdx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

1112. Cum ſit $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx}(b-x)$ erit elementum temporis $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{b-x}$. Integrum ergo tempus, quo corpus motu horizontali ſecundum AP eſt promotum erit $= 2\sqrt{c}\,l\frac{b}{b-x}$. Motus igitur horizontalis conuenit cum motu corporis in eodem medio reſiſtente per rectam AP a nulla potentia ſollicitati, celeritate initiali in A debita altitudini $bb:4c$.

Corollarium 2.

1113. Neque vero haec temporis proprietas tantum locum habet, ſi corpus ſecundum MP trahitur; ſeu ſi fuerit Q:R$=y:z$, ſed ſemper valet ſi modo eſt P$=o$. Sequitur enim ex § 1108, quo non niſi P$=o$ ponebatur.

Corollarium 3.

1114. Motus igitur progreſſiuus corporis ſecundum AP eſt retardatus, et non vltra datum terminum qui eſt $x=b$, fieri poteſt. Tempus autem eſt infinite magnum, quo corpus ad hunc terminum pertingere poteſt.

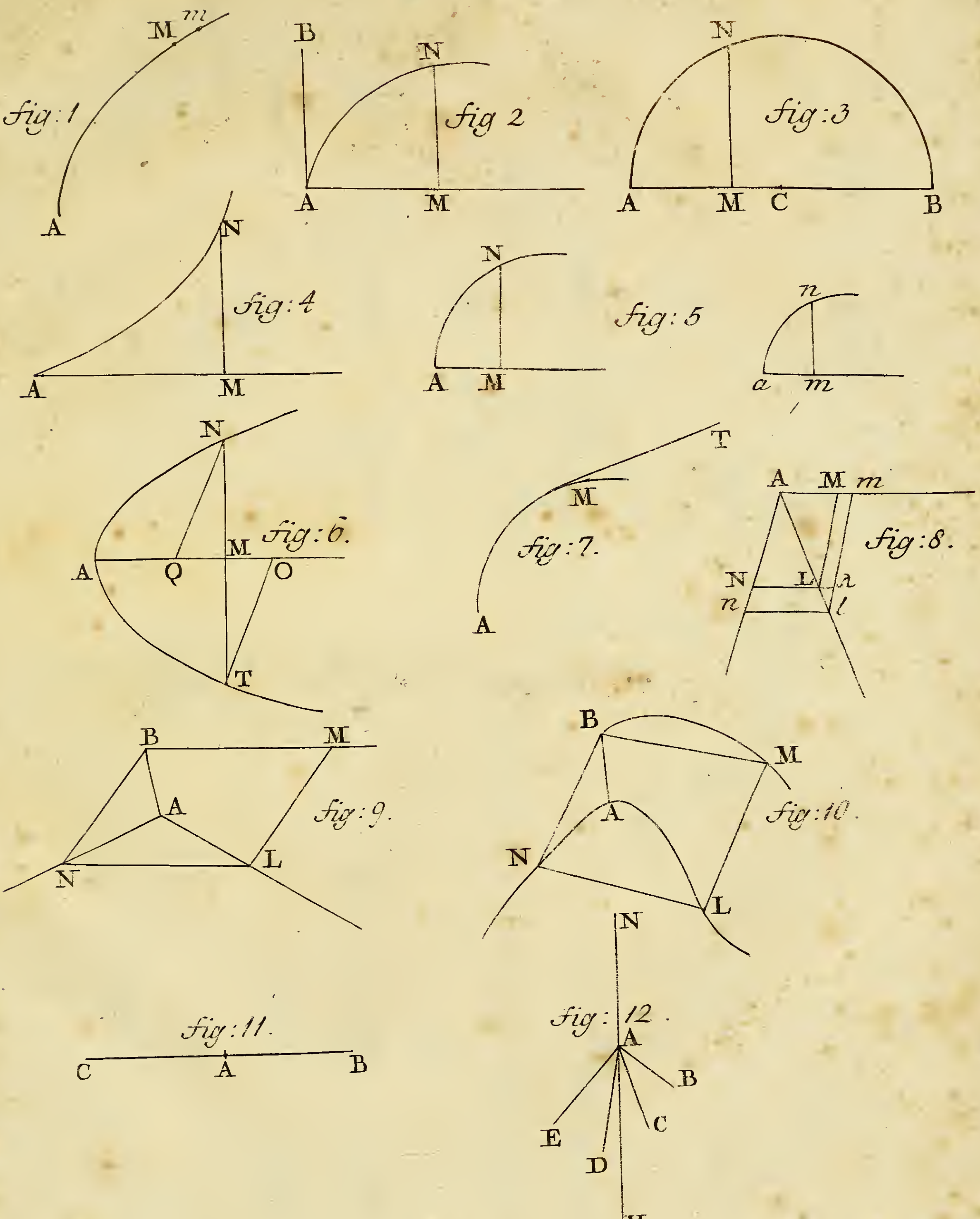
Exem-

Exemplum.

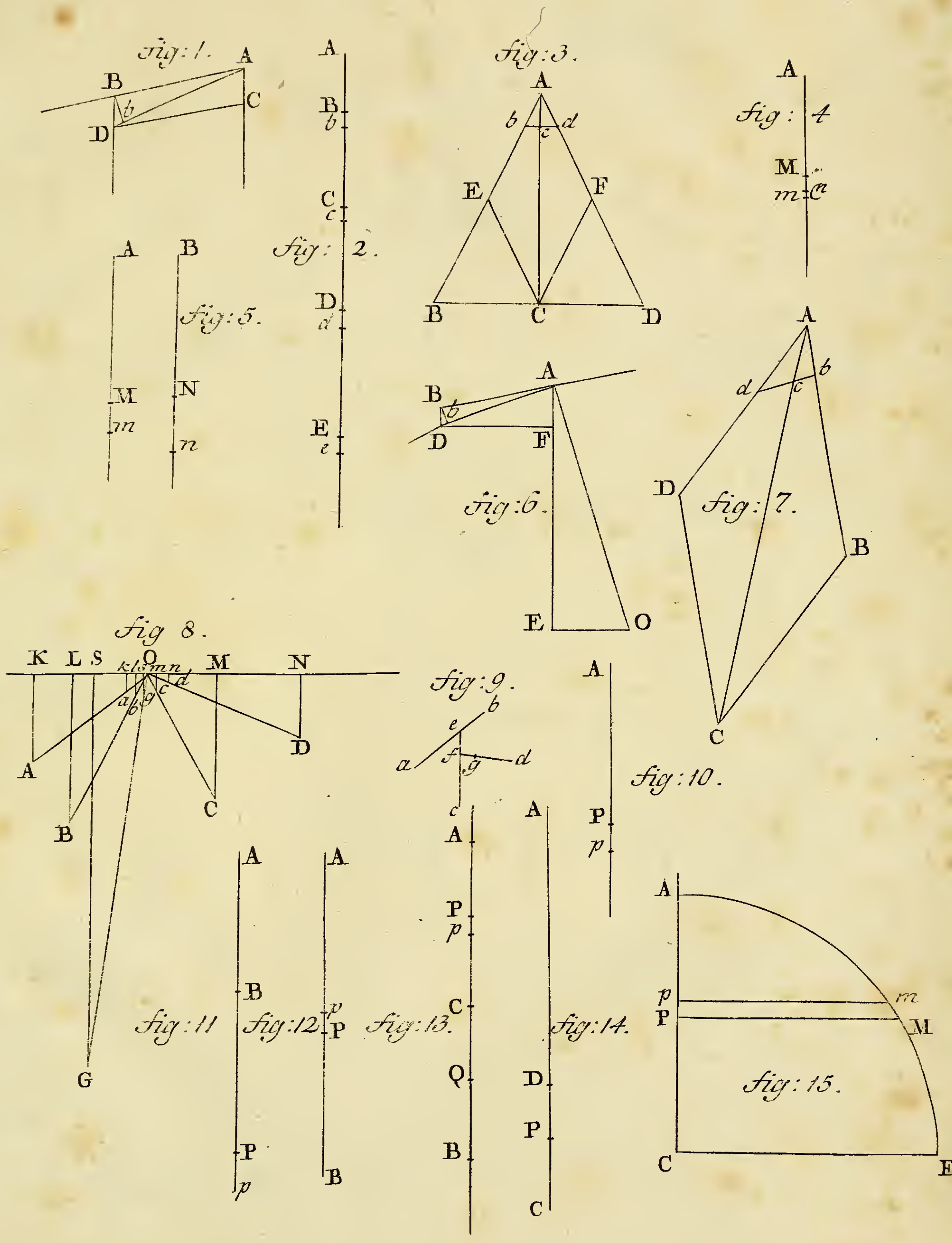
1115. Ponamus vim, qua corpus ad rectam AP attrahitur eſſe ipſis diſtantiis MP proportionalem ſeu $S = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{f}$. Ad curuam igitur determinandam habebuntur hae aequationes $fddy(b-x)^2 = -2cydx^2$, et $y^2dp = adx$, in illa ponatur $y = e^{\int udx}$, fietque $du + u^2dx = -\frac{2cdx}{f(b-x)^2}$. Quae aequatio ſeparabilis fit ponendo $u = \frac{q}{b-x}$; prodit enim $\frac{fdq}{2c+fq+fq^2} = -\frac{dx}{b-x}$. Dabitur igitur q et propterea etiam u in x. Conſequenter etiam y per x cognoſcetur, ex quo habebitur proiectio curuae deſcriptae in plano APQ. Deinde ex dato y per x, dabitur quoque p ob $dp = \frac{adx}{y^2}$ per x, et propterea ſimul z per x. Quocirca tota curua a corpore deſcripta poterit conſtrui.

Corollarium 4.

1116. Si b euanescit, ſimul quoque motus progreſſiuus corporis ſecundum AP enanescit, et hanc ob rem corpus in plano in A ad AP normali mouebitur attractum ad A in ratione diſtantiarum. Curuam autem quam hoc caſu corpus deſcribit quoque conſtruere licuit §. 1027 et ſeqq.


fig:1
A M m
fig 2
B N A M
fig:3
N A M C B
fig:4
N A M
fig:5
N A M n a m
fig:6.
N A Q M O T
fig:7.
T M A
fig:8.
A M m N L λ n l
fig:9.
B M A N L
fig:10.
B M A N L
fig:11.
C A B
fig:12.
N A B C D E M

Tom: I. Tab: I


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11
Fig: 12
Fig: 13.
Fig: 14.
Fig: 15.

Tom: I. Tab: II.

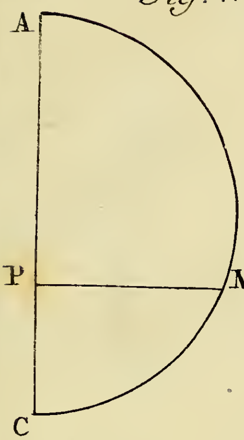


fig: 1.

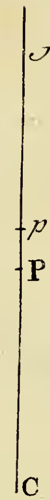


fig: 2.

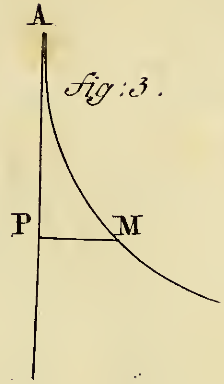


fig: 3.

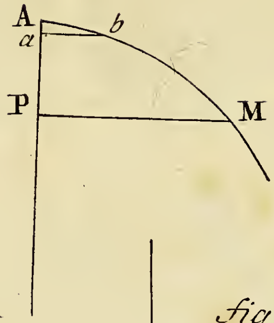


fig: 4.

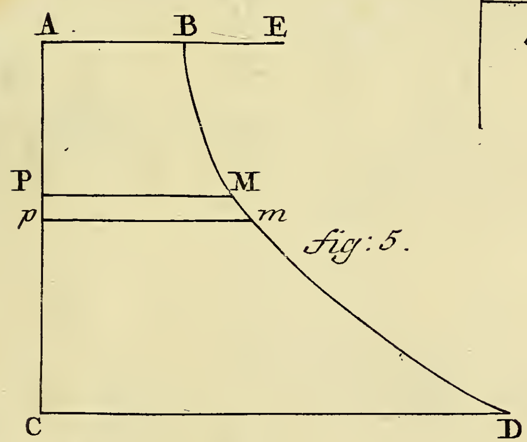


fig: 5.

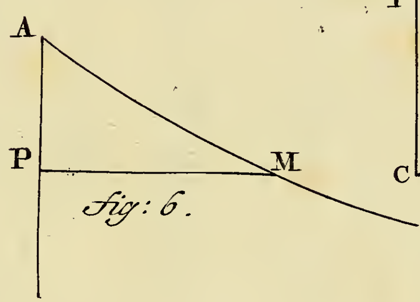


fig: 6.

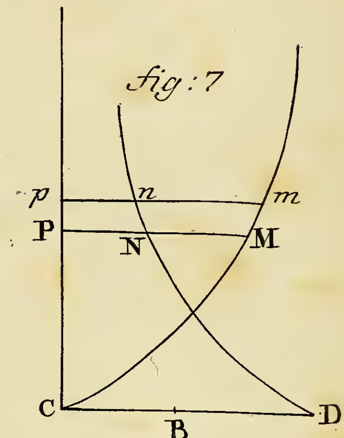


fig: 7

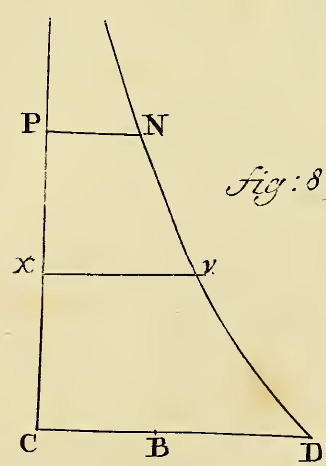


fig: 8.

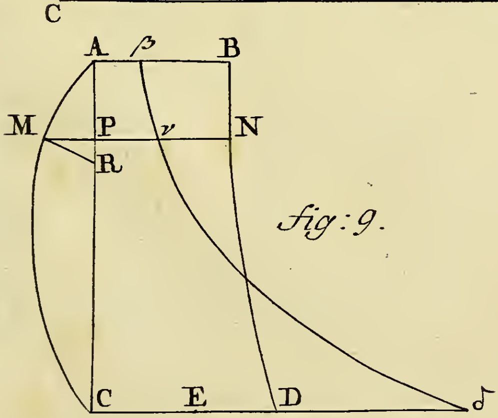


fig: 9.

Tom: I. Tab: II

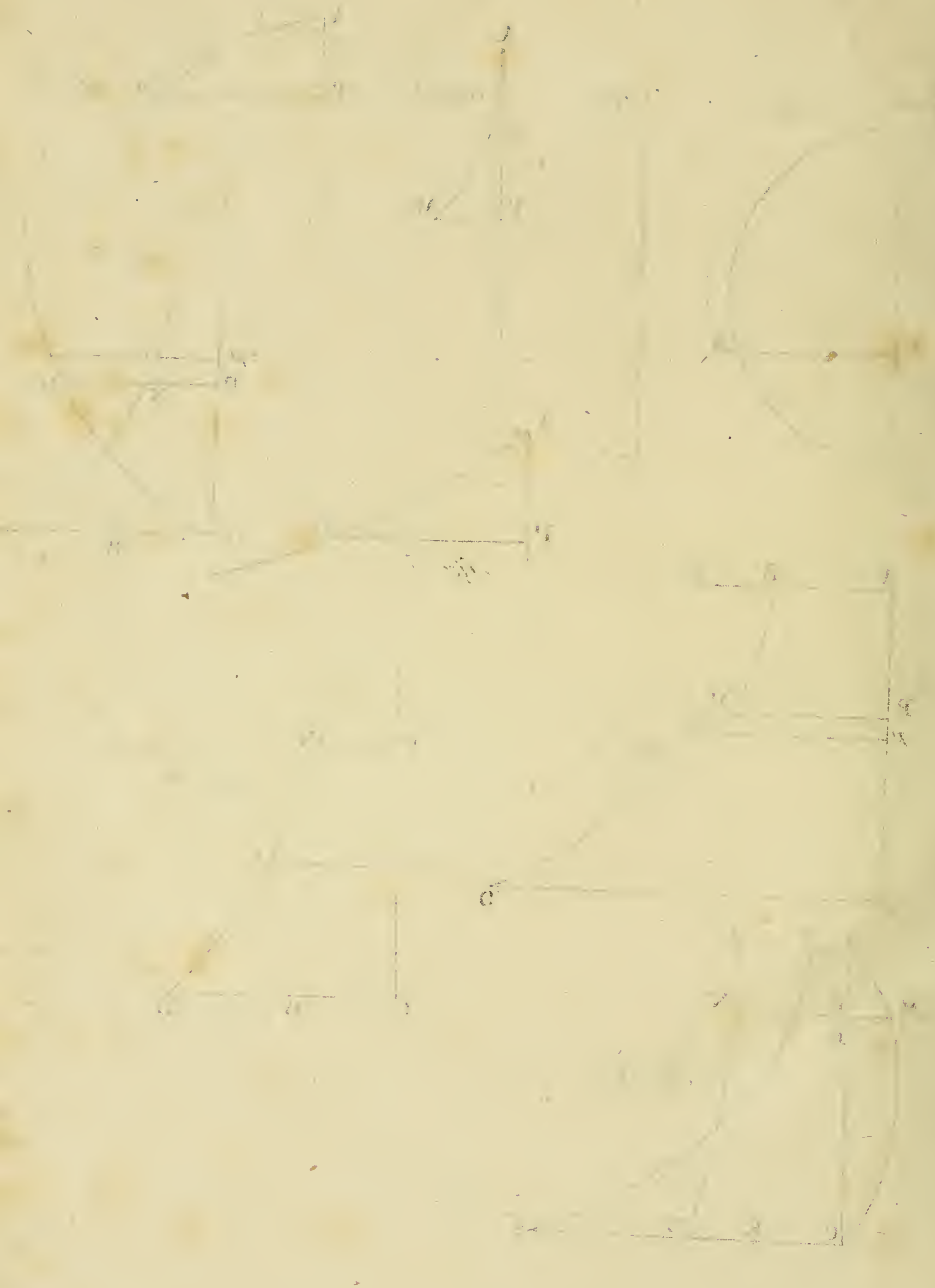


fig: 1.

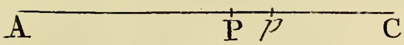


fig: 2.



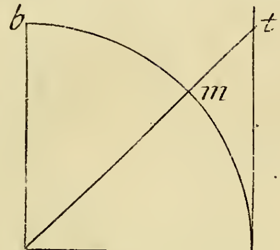


fig: 5.

fig: 3.

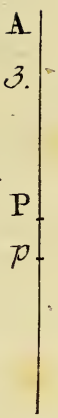


fig: 4.

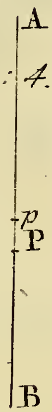


fig: 6.

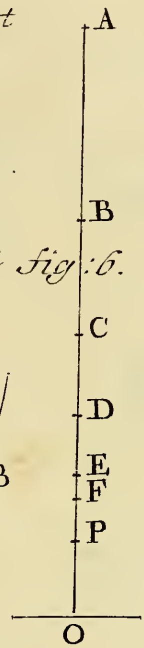


fig: 7.



fig: 9.



fig: 8.

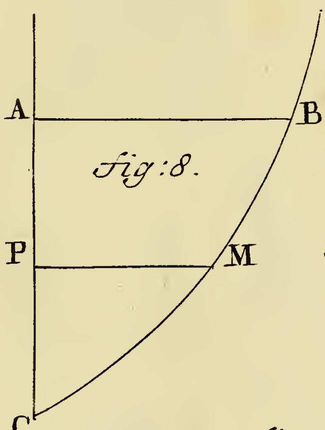


fig: 12.

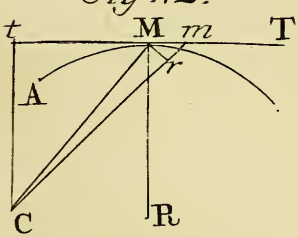


fig: 10.

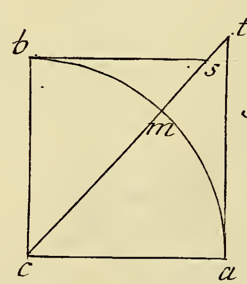


fig: 11.

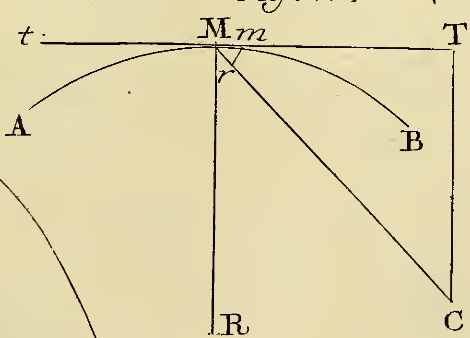
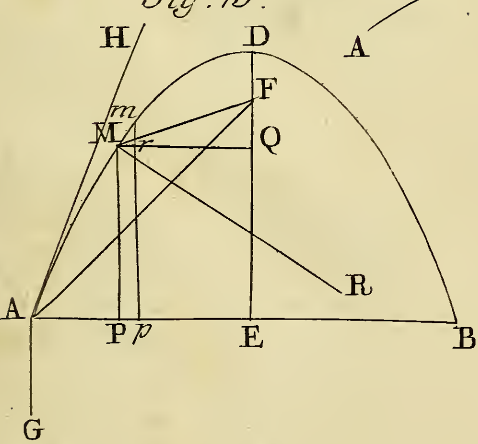
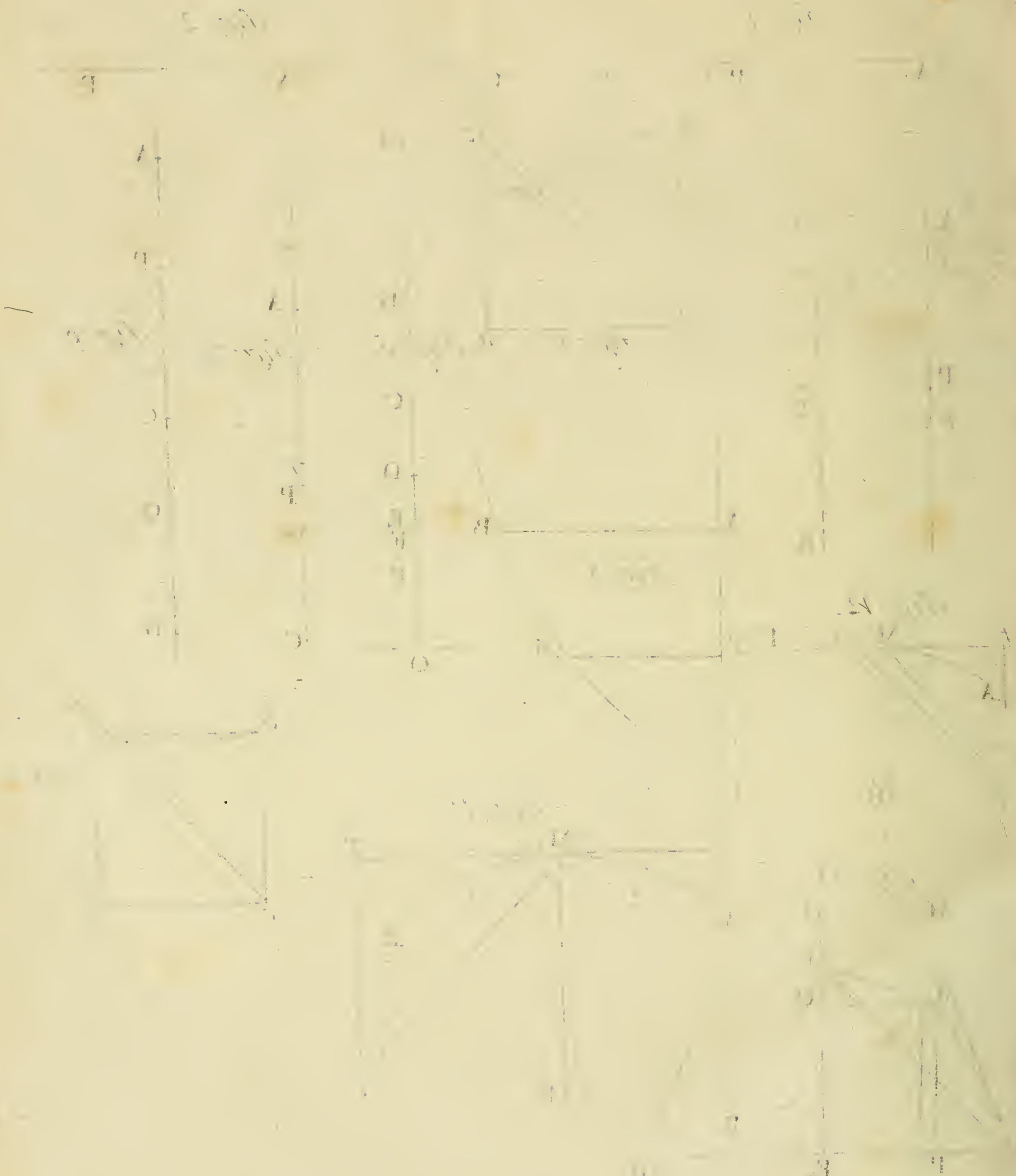


fig: 13.



Tom: I. Tab: IV.



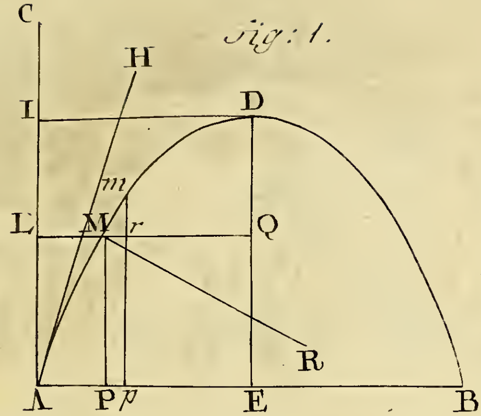


Fig: 1.

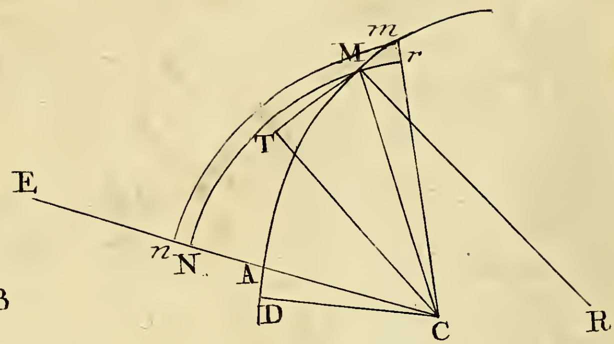


Fig: 2

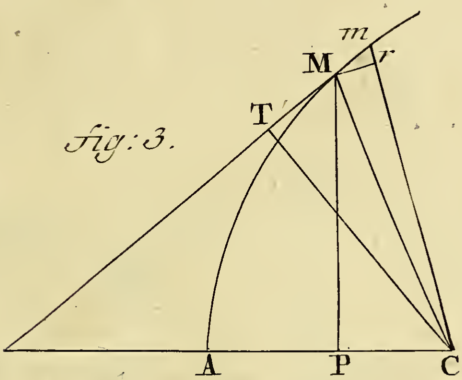


Fig: 3.

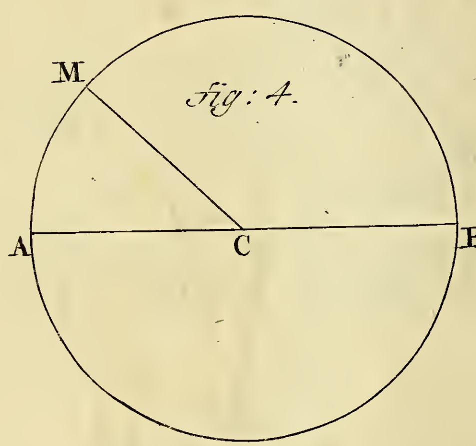


Fig: 4.

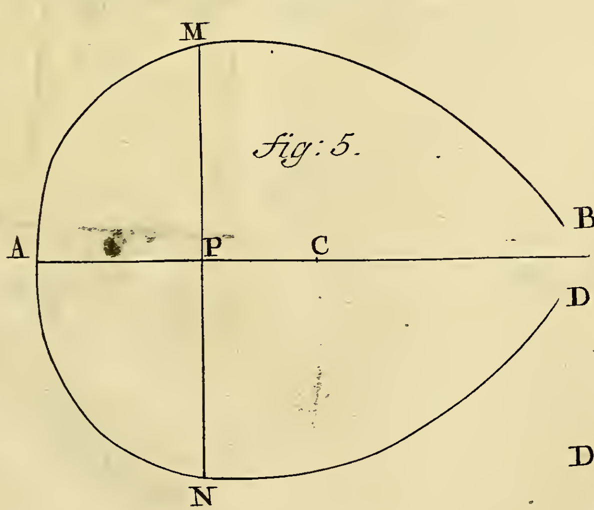


Fig: 5.

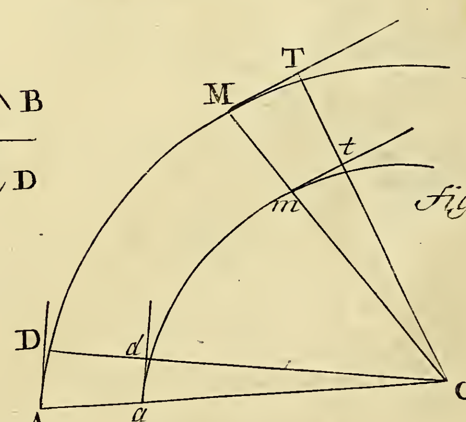


Fig: 6.

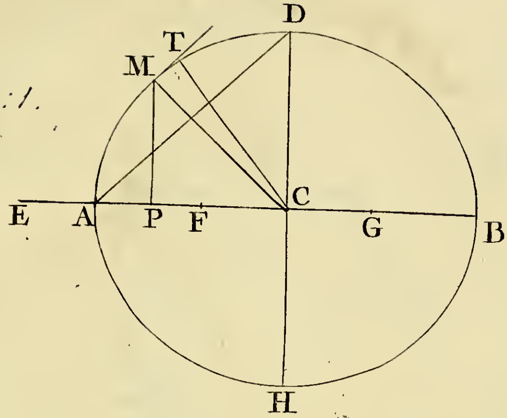


fig: 1.

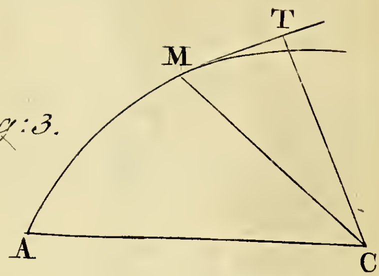


fig: 3.

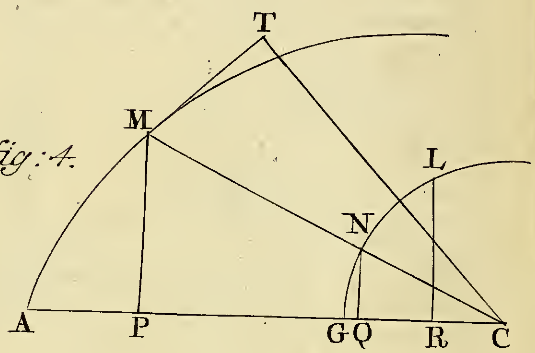


fig: 4.

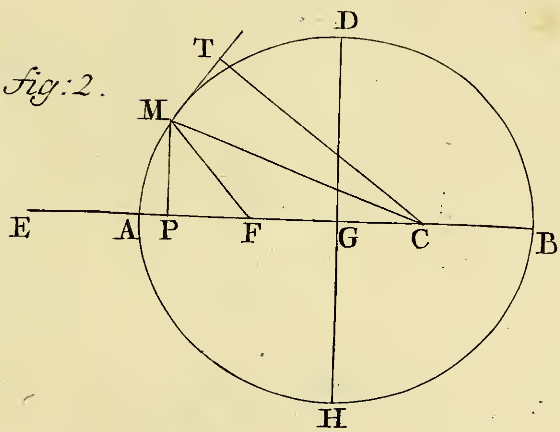


fig: 2.

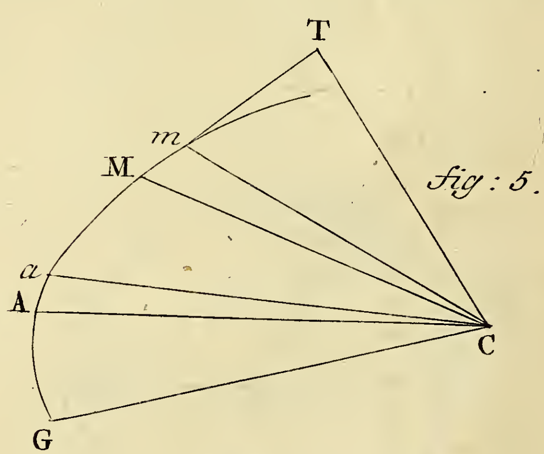


fig: 5.

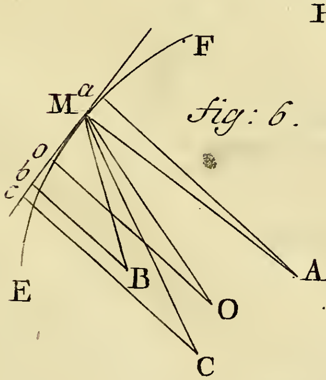


fig: 6.

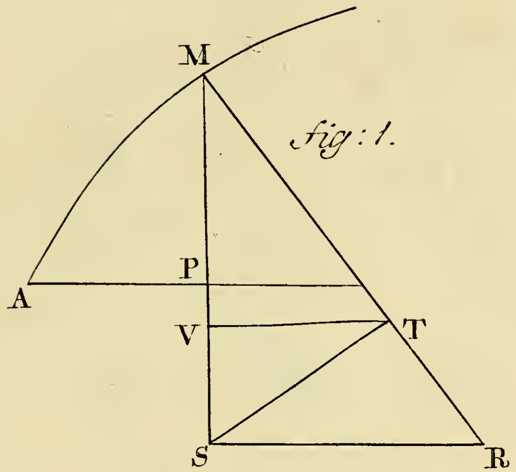


fig: 1.

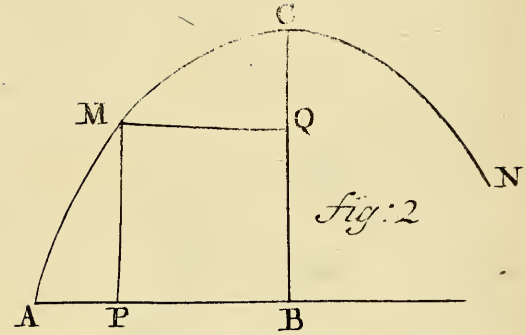


fig: 2

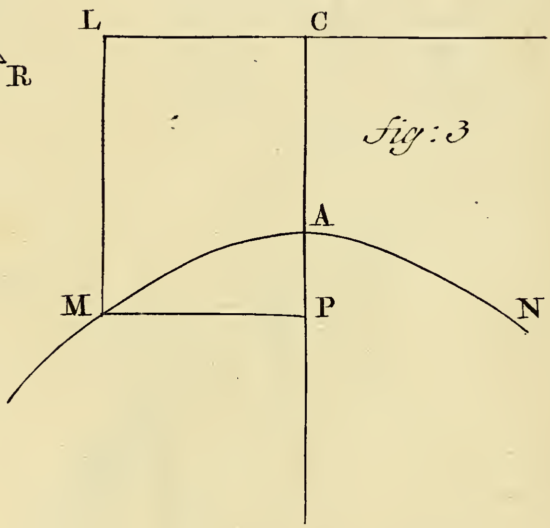


fig: 3

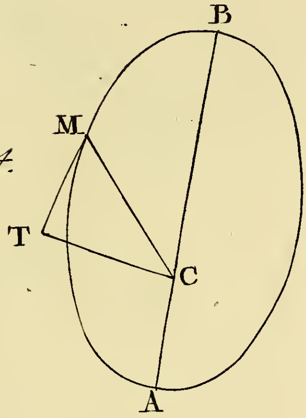


fig: 4.

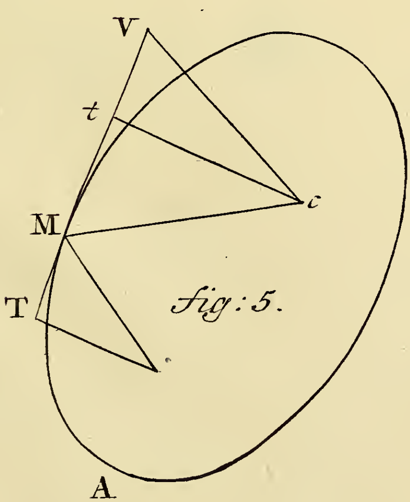


fig: 5.

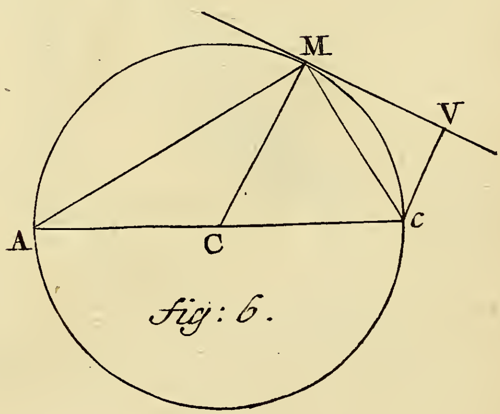


fig: 6.

Tom: I. Tab: VII

Fig: 1.

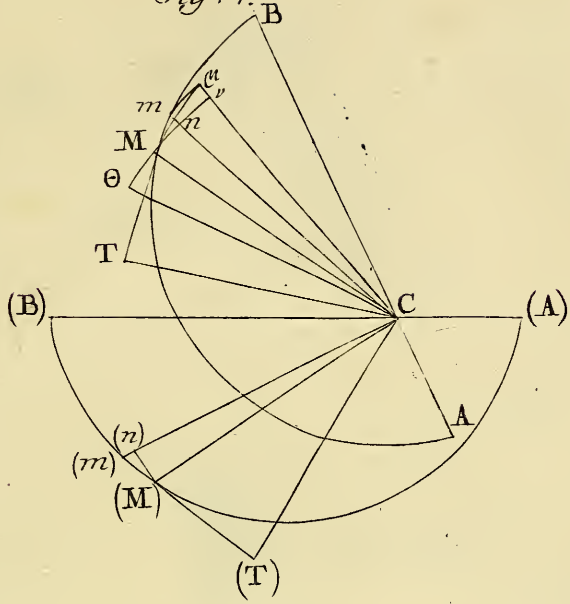


Fig: 2.

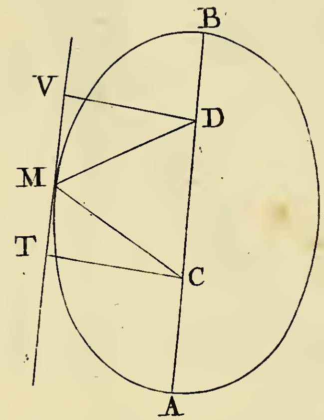


Fig: 3.

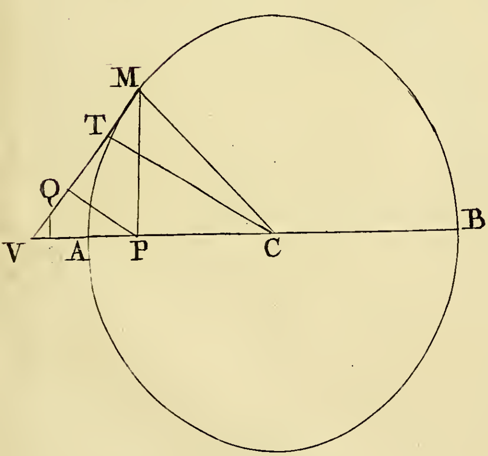
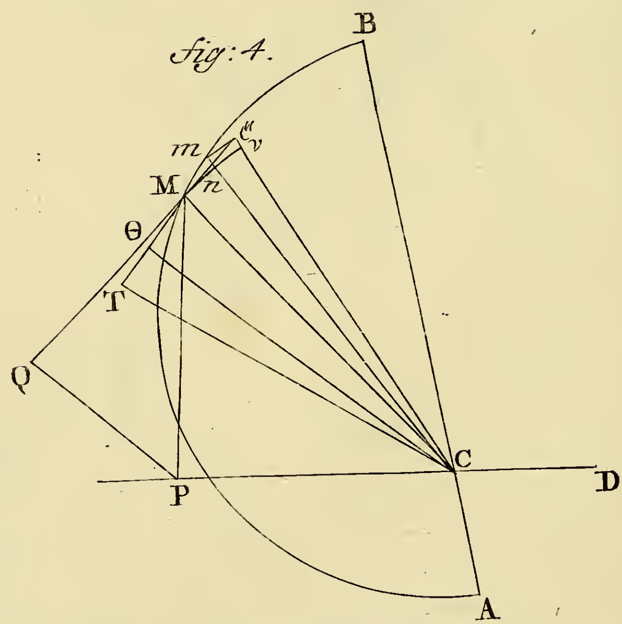


Fig: 4.



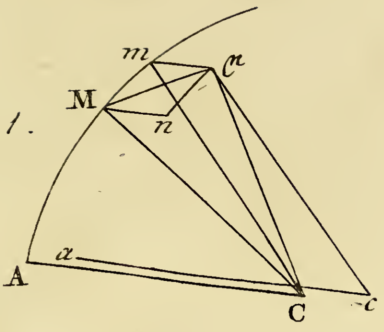


fig: 1.

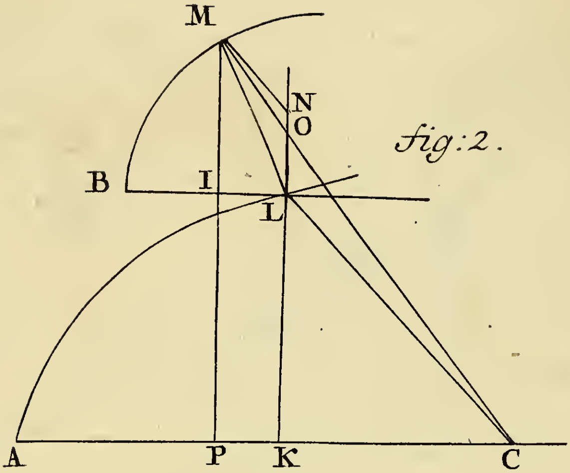


fig: 2.

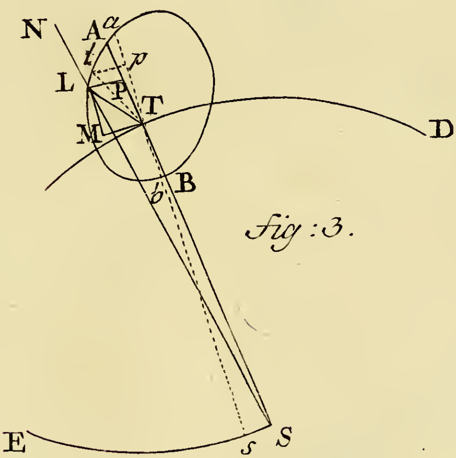


fig: 3.

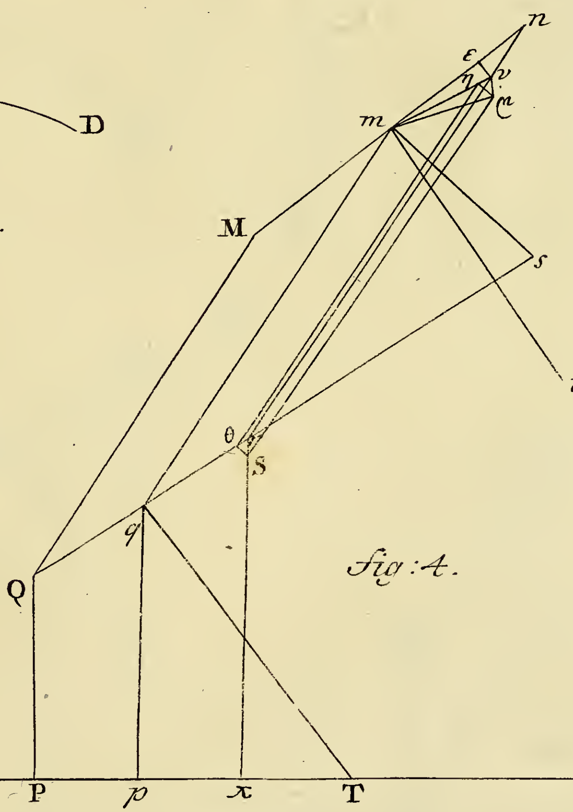


fig: 4.

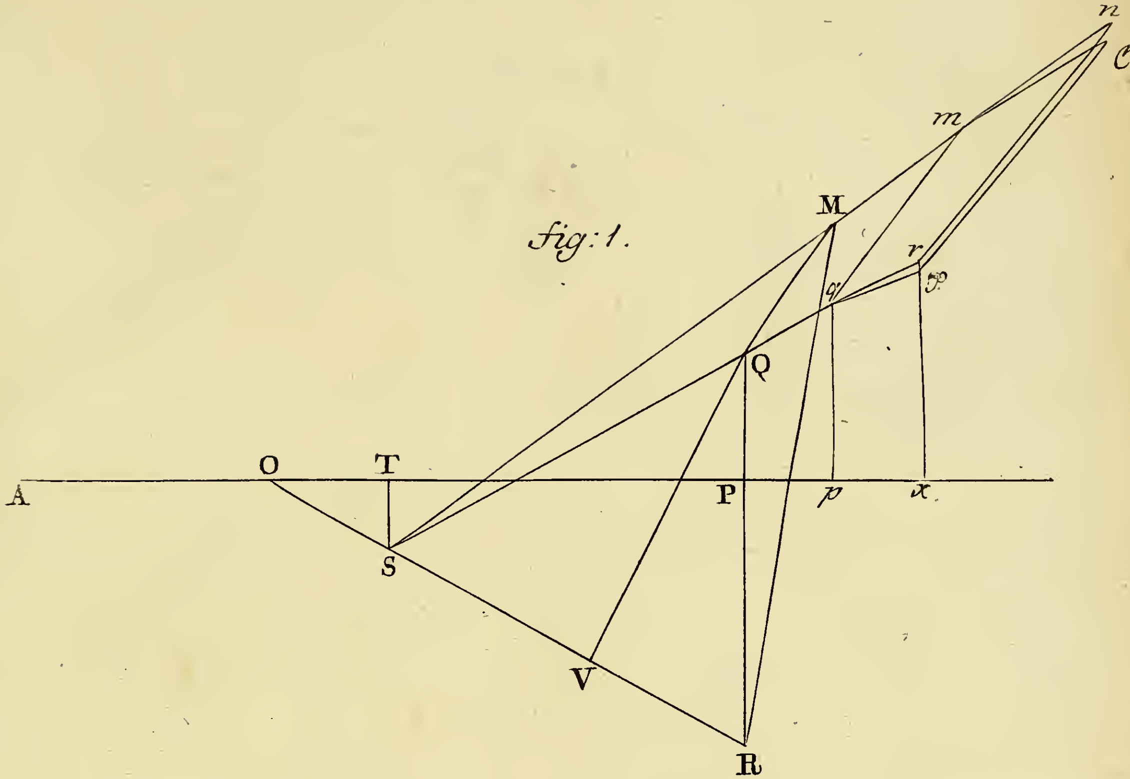


fig: 1.

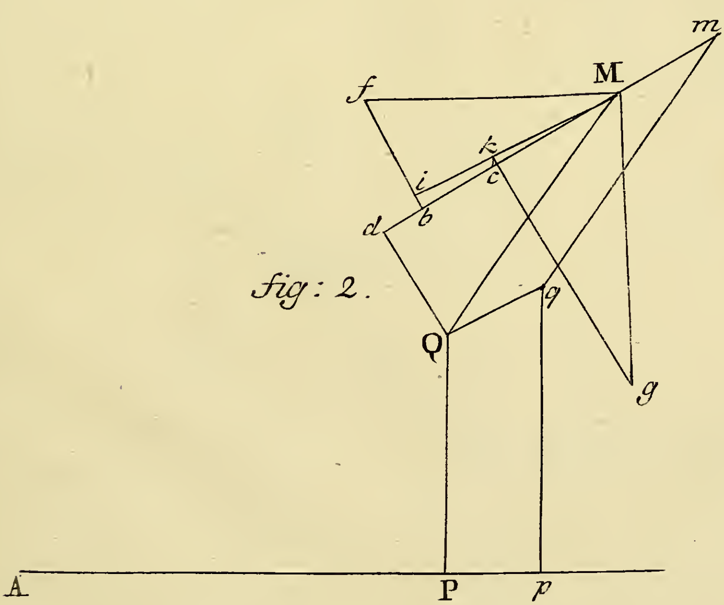


fig: 2.

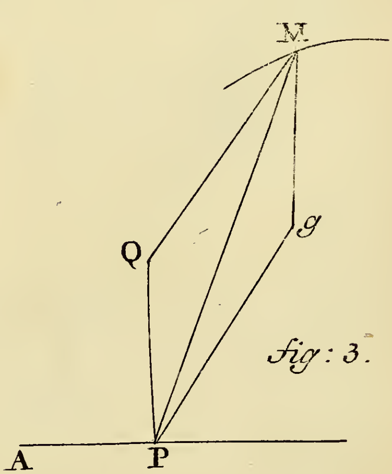


fig: 3.

Tom: I. Tab: X.

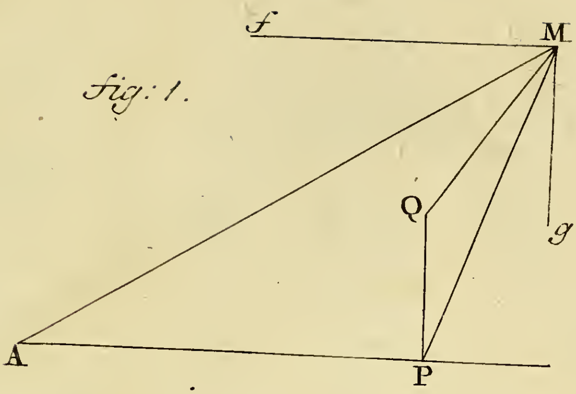


fig:1.

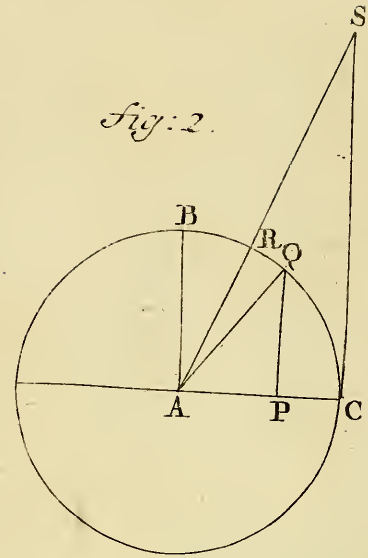


fig:2.

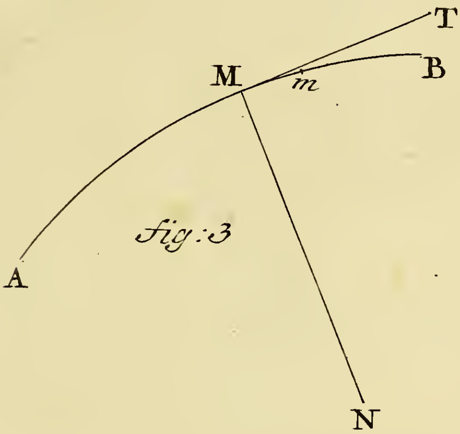


fig:3

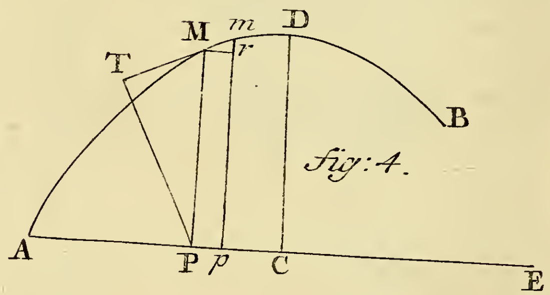


fig:4.

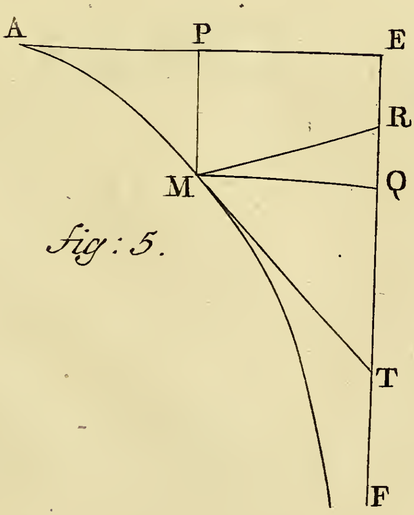


fig:5.

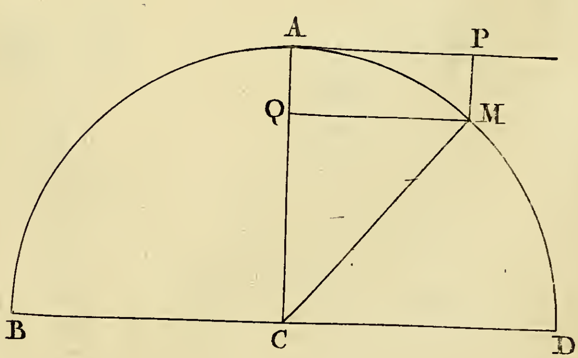


fig:6.

fig: 1.

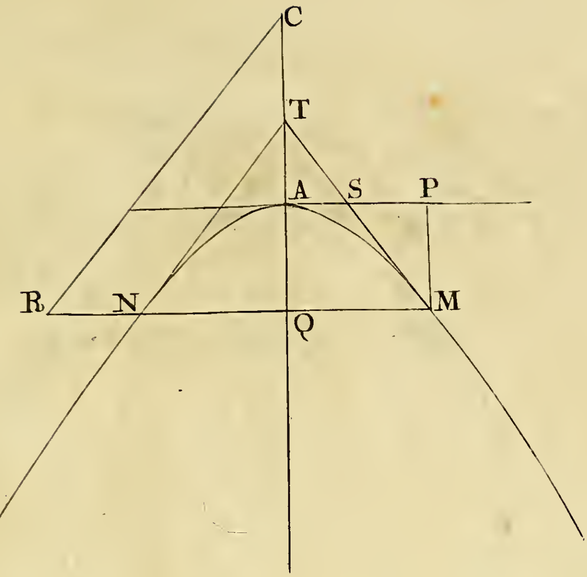


fig: 3.

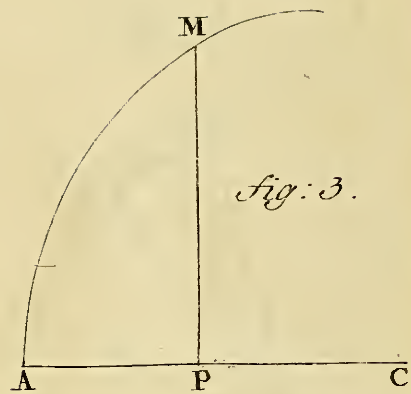


fig: 2.

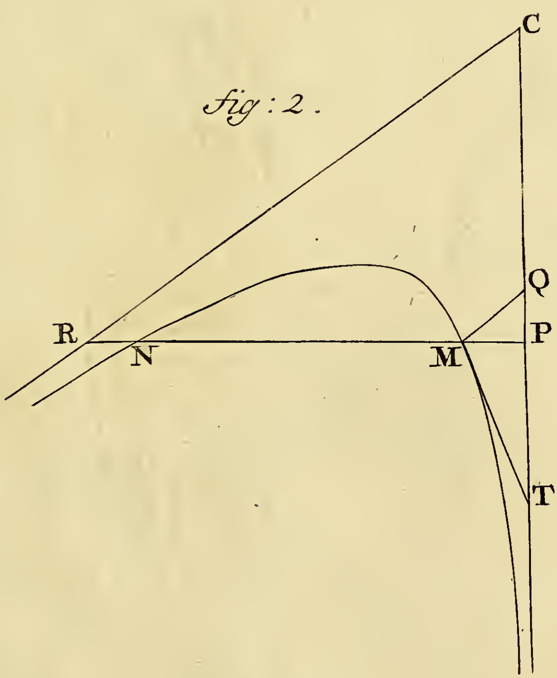


fig: 4.

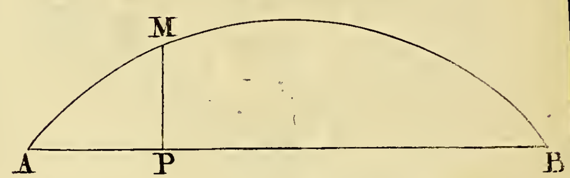


fig: 5.

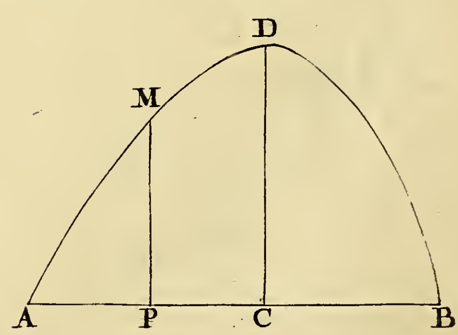


Fig: 1.

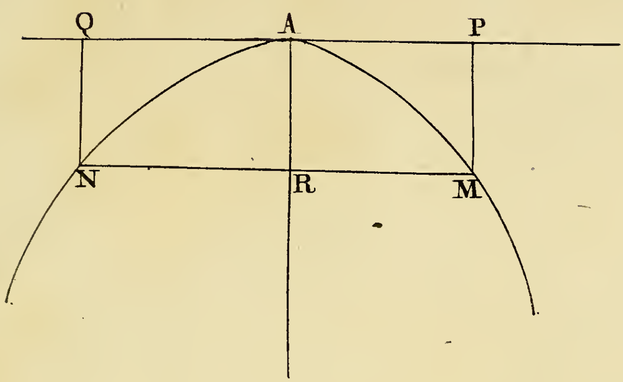


Fig: 2.

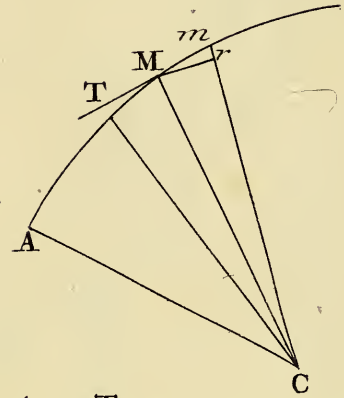


Fig: 3.

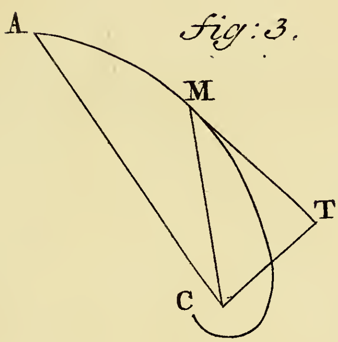


Fig: 4.

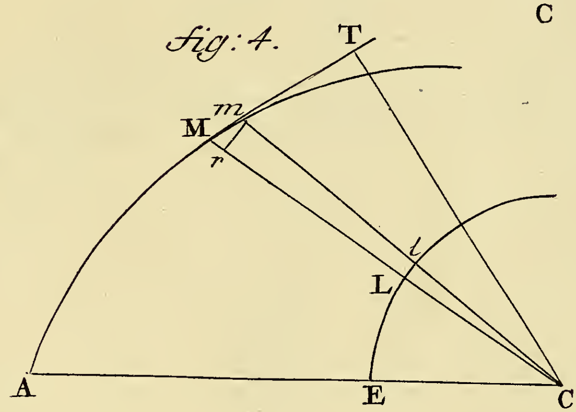


Fig: 5.

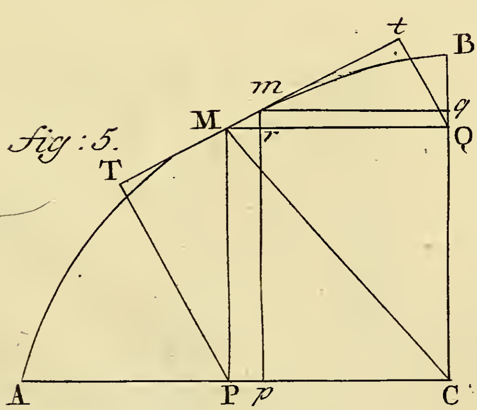


Fig: 6.

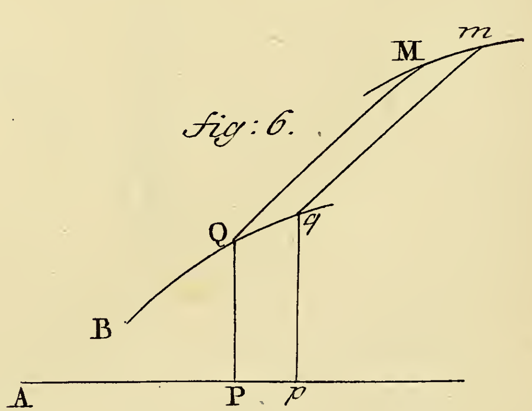




Fig: 1.

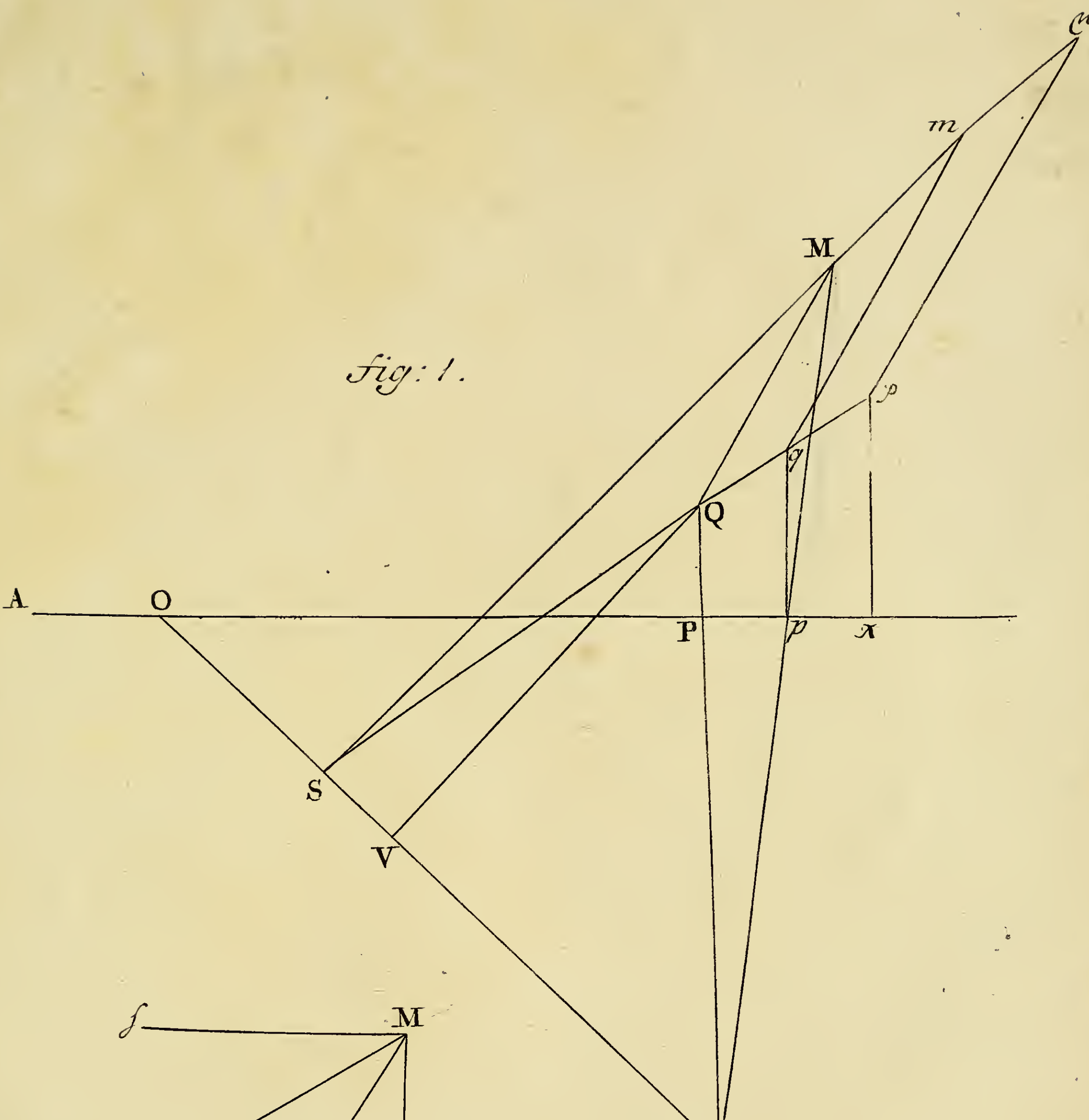
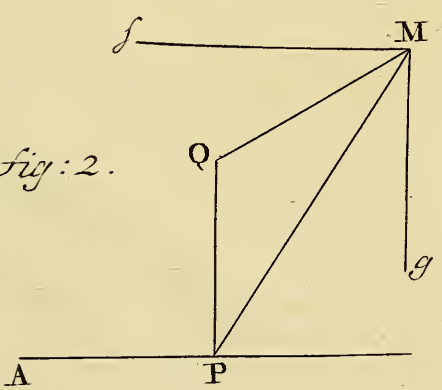


Fig: 2.



[illegible]

> < [illegible]

[illegible]

19568

Vault